1	2	3	4	5	итог	эксперта
7б	7б	7б	0б	7б	28б	[illegible]
7	7	7	~~0~~ 7	7	~~28~~ 35	[illegible]

М-11-51-5

N 11.1

Обозначим четыре числа, расставленные на окружности как a, b, c, d.

По условию $a+b+c+d=0 \Rightarrow \underline{b+d=-(a+c)}$.

Сумма произведений пар соседних чисел равна

$ab+bc+cd+ad=(ab+ad)+(bc+cd)=a(b+d)+c(b+d)=$

$=(b+d)(a+c)=-(a+c)(a+c)=-(a+c)^2$

$(a+c)^2 \geq 0 \Rightarrow -(a+c)^2 \leq 0 \Rightarrow$ неравенство $-(a+c)^2>0$ не выполняется, следовательно, неравенство $ab+bc+cd+ad>0$ не выполняется $\Rightarrow$ полученная сумма не может быть положительной.

Ответ: нет, не может

7б

N 11.2

$\angle A, \angle B, \angle C \in (0^\circ; 180^\circ)$, т.к. углы треугольника

$$\begin{cases} \sin\angle A+\cos\angle B=\sqrt{2} \\ \cos\angle A+\sin\angle B=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow (\sin\angle A+\cos\angle B)(\cos\angle A+\sin\angle B)=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin\angle A\cdot\cos\angle A}_{\frac{\sin 2\angle A}{2}}+\underbrace{\sin\angle A\cdot\sin\angle B+\cos\angle A\cdot\cos\angle B}_{\cos(\angle A-\angle B)}+\underbrace{\sin\angle B\cdot\cos\angle B}_{\frac{\sin 2\angle B}{2}}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\angle A}{2}+\cos(\angle A-\angle B)+\frac{\sin 2\angle B}{2}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\angle A+\sin 2\angle B+2\cos(\angle A-\angle B)=4$$

$\left.\begin{array}{l} \sin 2\angle A \leq 1 \\ \sin 2\angle B \leq 1 \\ 2\cos(\angle A-\angle B)\leq 2 \end{array}\right\}$ равенство выполняется только при $\begin{cases} \sin 2\angle A=1 \\ \sin 2\angle B=1 \\ \cos(\angle A-\angle B)=1 \end{cases}$

$\sin 2\angle A=1 \Rightarrow 2\angle A=90^\circ \Rightarrow \underline{\angle A=45^\circ}$

$\sin 2\angle B=1 \Rightarrow 2\angle B=90^\circ \Rightarrow \underline{\angle B=45^\circ}$

$\underline{\angle A, \angle B \in (0^\circ; 180^\circ) \Rightarrow 2\angle A, 2\angle B \in (0^\circ; 360^\circ)}$

$\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-45^\circ-45^\circ=90^\circ$ (по теореме о сумме углов Δ)

Ответ: 90°

7б

№11.3

$n \in \mathbb{N}$

$n\sqrt{n} = n^1 \cdot n^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt{n\sqrt{n}} = \sqrt{n^{\frac{3}{2}}} = n^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = n^{\frac{3}{4}}$

$n\sqrt{n\sqrt{n}} = n^1 \cdot n^{\frac{3}{4}} = n^{\frac{7}{4}}$

$\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} = \sqrt{n^{\frac{7}{4}}} = n^{\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}} = n^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{n^7}$

$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, где p_i – простое число, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geq 0$

$n^7 = p_1^{7k_1} \cdot p_2^{7k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{7k_m}$

Корень 8-ой степени из n^7 является натуральным, если каждый простой множитель при факторизации n^7 имеет степень кратную 8.

$7k_i \vdots 8$, $7 \not\vdots 8 \Rightarrow k_i \vdots 8 \Rightarrow k_i = 8c_i$ $(c_i \in \mathbb{Z},\ c_i \geq 0)$

$n^7 = p_1^{56c_1} \cdot p_2^{56c_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{56c_m}$, $n = p_1^{8c_1} \cdot p_2^{8c_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{8c_m}$

$\sqrt[8]{n^7} = p_1^{7c_1} \cdot p_2^{7c_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{7c_m}$

$\sqrt[8]{n^7} < 2219$ (по условию)

p	2	3	5	…
p^7	128 •	2187 •	$5^7 = 625 \cdot 125 > 100 \cdot 100 > 2219$	$> 5^7 > 2219$
p^{14}	$2^{14} = (2^7)^2 > 100^2 > 2219$	$3^{14} > 2^{14} > 2219$	$5^{14} > 3^{14} > 2219$	$> 5^{14} > 2219$

№ 11.3 (продолжение) M-11-51-5

$\Rightarrow$ со степенью 7 в $\sqrt[8]{n^7}$ могут входить только 2 и 3, остальные простые числа могут входить только со степенью 0.

$\Rightarrow$,c' при 2 $\in [0;1]$, ,c' при $3 \in [0,1]$, остальные ,c' равны 0 $\Rightarrow$ произведение простых множителей, входящих в n и не равных 2 или 3, равно нулю.

$\Rightarrow$ Возможны следующие варианты:

$n = 1$, $n = 2^8 = 256$, $n = 3^8 = 6561$

$2^7 \cdot 3^7 = 128 \cdot 2187 > 100 \cdot 100 > 2279 \Rightarrow$ 2 и 3 не могут одновременно входить в ,n' с коэффициентами ,c', равными 1.

Ответ: 1, 256, 6561 7б

№ 11.4

2			1				2
		−1			−1		
	−1	−1			−1	−1	
2				1			2
		−1			−1		
	−1	−1			−1	−1	
		−1			−1		
2			1				2

$\leftarrow$ Пример расстановки

Сумма чисел во всей таблице равна $2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 14 = 15 - 14 = 1 > 0$

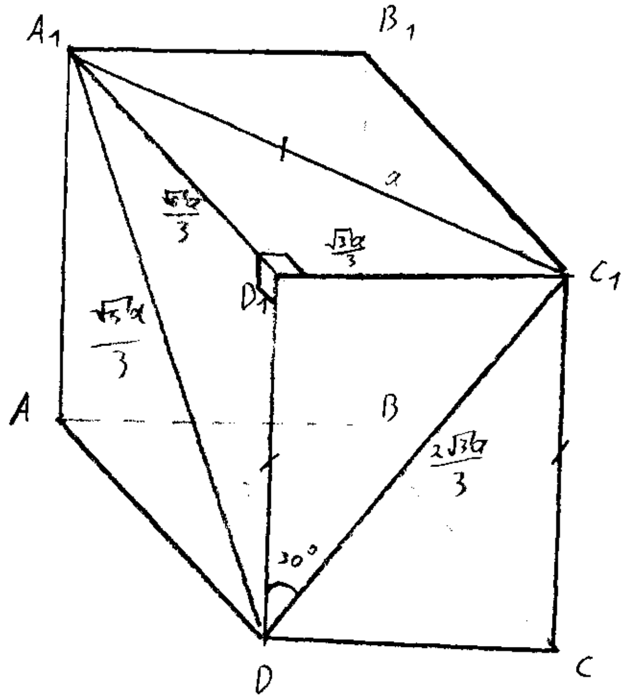
Ниже представлена таблица, число в каждой клетке которой равно сумме чисел в квадрате 3×3, центром которого является данная клетка. Можно видеть, что все числа отрицательны $\Rightarrow$ сумма чисел в любом квадрате 3×3 отрицательна, и приведённая расстановка удовлетворяет всем условиям.

	−1	−2	−1	−1	−3	−1	
	−1	−3	−1	−1	−2	−1	
	−1	−3	−1	−1	−2	−1	
	−1	−3	−1	−1	−2	−1	
	−4	−4	−3	−3	−4	−4	
	−1	−2	−1	−1	−3	−1	

таблица с суммами чисел в квадратах 3×3 $\leftarrow$

~~0б~~ 7б.

№11.5



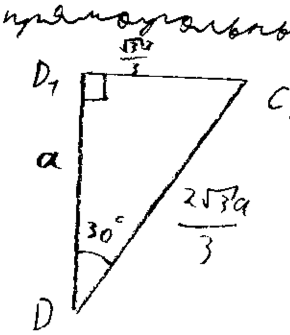
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед => его грани - прямоугольники.

$A_1B_1C_1D_1$ - прямоугольник => $\angle A_1D_1C_1 = 90°$ => $\triangle A_1C_1D_1$ - прямоугольный, A_1C_1 - гипотенуза => $A_1C_1 > A_1D_1$, $A_1C_1 > C_1D_1$.

По условию A_1C_1 равна по длине одному из рёбер $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $A_1C_1 > A_1D_1$, $A_1C_1 > C_1D_1$ => $A_1C_1 = DD_1$ =>

Обозначим $A_1C_1 = DD_1 = a$. $\angle D_1DC_1 = 30°$ (по условию)

D_1C_1CD - прямоугольник => $\angle DD_1C_1 = 90°$ => $\triangle D_1C_1D$ - прямоугольный



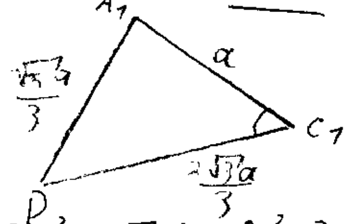
$\frac{DD_1}{C_1D} = \cos\angle D_1DC_1 = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ => $C_1D = DD_1 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$

$\frac{C_1D_1}{DD_1} = tg\angle D_1DC_1 = tg\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ => $C_1D_1 = DD_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

В прямоугольном треугольнике $A_1C_1D_1$ $A_1D_1^2 = A_1C_1^2 - C_1D_1^2 = a^2 - (\frac{\sqrt{3}a}{3})^2 = \frac{9a^2-3a^2}{9} = \frac{2a^2}{3}$, $A_1D_1 = \frac{\sqrt{6}a}{3}$ (по теореме Пифагора)

A_1D_1DA - прямоугольник => $\angle A_1D_1D = 90°$ => $\triangle A_1D_1D$ - прямоугольный => $A_1D^2 = A_1D_1^2 + DD_1^2 = (\frac{\sqrt{6}a}{3})^2 + a^2 = \frac{6a^2+9a^2}{9} = \frac{15a^2}{9}$, $A_1D = \frac{\sqrt{15}a}{3}$ (по теореме Пифагора)

по теореме косинусов в $\triangle A_1C_1D$:



$A_1D^2 = A_1C_1^2 + DC_1^2 - 2 \cdot A_1C_1 \cdot DC_1 \cdot \cos\angle A_1C_1D$ =>

=> $\cos\angle A_1C_1D = \frac{A_1C_1^2 + DC_1^2 - A_1D^2}{2A_1C_1 \cdot DC_1} =$

$= (a^2 + (\frac{2\sqrt{3}a}{3})^2 - (\frac{\sqrt{15}a}{3})^2) / (2 \cdot a \cdot \frac{2\sqrt{3}a}{3}) = \frac{9a^2+12a^2-15a^2}{9} / \frac{4\sqrt{3}a^2}{3} = \frac{6a^2}{9} \cdot \frac{3}{4\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\cos\angle A_1C_1D > 0$ => $\angle A_1C_1D < 90°$ => $\widehat{A_1C_1\ C_1D} = \angle A_1C_1D = \arccos(\frac{1}{2\sqrt{3}})$

Ответ: $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$

7б