лист 3

M-11-45-1

11.2. продолжение

$\sin\alpha = \sin\beta$ $\quad$ $\sin 45^\circ = \sin 45^\circ$ $\Rightarrow \beta = 45^\circ$

$\cos\alpha = \cos\beta$ $\quad$ $\cos 45^\circ = \cos 45^\circ$

$\alpha = 45^\circ,\ \beta = 45^\circ \Rightarrow c = 180^\circ - (\alpha+\beta) = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$

проверка: $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2} = \sqrt2 \Rightarrow$ верно

$\cos 45^\circ + \sin 45^\circ = \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2} = \sqrt2$

Ответ: $\angle c = 90^\circ$

5б

11.3. найти все $n \in N$, такие $y = \sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} < 2215$, $y \in N$

$\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} = \sqrt{n\sqrt{n^{\frac12}\cdot n}} = \sqrt{n^{\frac32\cdot\frac12}\cdot n} = \sqrt{n^{\frac34+1}} = n^{\frac74\cdot\frac12} = n^{\frac78}$

$n^{\frac78} < 2215$

$\sqrt[8]{n^7} < 2215$

$n^{\frac78} = n^{\frac88-\frac18} = \frac{n^1}{n^{\frac18}} = \frac{n}{\sqrt[8]{n}}$

$\frac{n}{\sqrt[8]{n}} < 2215$ $\quad$ заменяем $\sqrt[8]{n}$ на K, $K>0$, $K\in N$

$\Rightarrow n = K^8$

$\frac{K^8}{K} < 2215$ $\quad$ $K^7 < 2215$

перебираем.

$K_1 = 1$ $\quad$ $1 < 2215$

$K_2 = 2$ $\quad$ $128 < 2215$

$K_3 = 3$ $\quad$ $2187 < 2215$ $\quad \Rightarrow K_{123} = 1, 2, 3$

$K = 4$ $\quad$ $4^7 > 2215$.

$K = \sqrt[8]{n} \Rightarrow K^8 = n$ $\quad$ $n = K^8$

$K_1 = 1 \to n_1 = 1$

$K_2 = 2$ $\quad$ $n_2 = 256$

$K_3 = 3$ $\quad$ $n_3 = 6561$

Ответ: $n \in \{1, 256, 6561\}$

1	2	3	4	5	итог	подпись эксперта
7б	5б	7б	7б	7б	33б	[signature]
7	5	7	7	7	33	[signature]

11.4

9	0	0	0	0	0	0	9
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-10	0	0	-10	0	0
0	0	0	0	9	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-10	0	0	-10	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	9

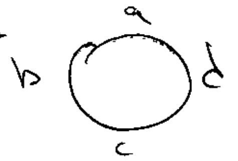
сумма всех чисел $= -40 + 45 = 5 \quad 5 > 0$

сумма в любом квадрате $3\times3 = -1$ ~~10~~

или -10

75

11.1



$a+b+c+d=0$

$a\cdot b + b\cdot c + c\cdot d + d\cdot a \; V \; 0$

$b(a+c) + d(c+a) \; V \; 0$

(1) $(a+c)(b+d) \; V \; 0$

$a+b+c+d=0 \Rightarrow$

$a+c = -(d+b)$

Заменим в (1) $(a+c)$ на $-(d+b)$

$-(d+b)(b+d) \; V \; 0$

$-(d+b)^2 \; V \; 0$

$(d+b)^2 \geq 0$ | умножим на -1 обе части ~~...~~

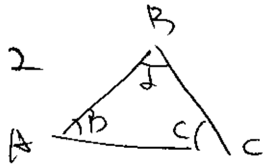
$-(d+b)^2 \leq 0 \Rightarrow$ сумма этих чисел (произв-ии) всегда меньше или равна нулю

Ответ: нет, не может

$V \to$ неизвестный знак из набора $<; >; \leq; \geq; =$

75

11.2



$\angle C - ?$

(1) $\sin\alpha + \cos\beta = \sqrt{2} \quad \cos\alpha + \sin\beta = \sqrt{2}$

(2) $\sin\alpha + \cos\beta = \cos\alpha + \sin\beta$

$\sin\alpha - \cos\alpha = \sin\beta - \cos\beta$ | возведем обе части ур-я в квадрат

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\beta - 2\sin\beta\cos\beta + \cos^2\beta$

основное тригонометр-ое тожд-ва: $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

неравносильное преобразование

$\cancel{1} - 2\sin\alpha\cos\alpha = \cancel{1} - 2\sin\beta\cos\beta \qquad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin2\varphi$

$\sin2\alpha = \sin2\beta$

$x = 2\alpha \quad 2\beta = y$ В общем виде это неверно

$\sin x = \sin y \Rightarrow x = y \Rightarrow 2\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$

заменим $\sin\beta$ на $\sin\alpha$ в (2)

$\sin\alpha + \cos\beta = \cos\alpha + \cancel{\sin\alpha} \qquad \cos\beta = \cos\alpha$ заменим в (1) $\cos\beta$ на $\cos\alpha$

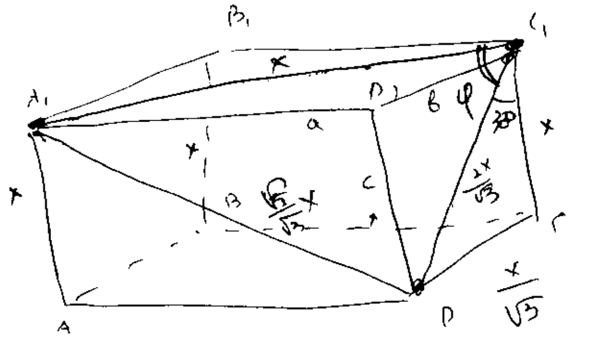
$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$ | возведем обе части ур-я в квадрат

$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 2$

$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 2$

$\sin2\alpha = 1 \quad 2\alpha = x \quad \sin x = 1 \quad x = 90^\circ \quad x = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{x}{2} = \frac{90}{2} = 45^\circ$

11.5



Найти: $\angle\varphi$ - ?

A_1C_1 = одному из ребер a, b, c
она не может быть равна a или b т.к. ~~каждое ребро должно быть~~ меньше ~~целого~~ ~~соседних~~
это гипотенуза и катет прямоуг. то 0, равные они быть не могут
т.к. по закону Пифагора той катет будет равен 0

$\Rightarrow A_1C_1 = c$, $c = DD_1, CC_1, AA_1, BB_1$

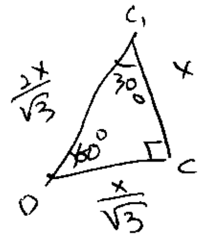
76

$\Rightarrow A_1C_1CA$ образует квадрат.

обозначим ребро ~~сторону~~ A_1C_1 и равное ему за x

т.к. угол по условию между C_1D и $x = 30^\circ \Rightarrow$

$\angle CDC_1 = 60^\circ$. найдем стороны треугольника C_1CD.



$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt3}{2} = \frac{x}{C_1D}$ $C_1D = \frac{2x}{\sqrt3}$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{DC\sqrt3}{2x}$ $DC = \frac{2x}{2\sqrt3} = \frac{x}{\sqrt3}$

Чтобы найти угол A_1C_1D, нужно найти все стороны треугольника A_1DC_1 и через теорему косинусов найти $\angle A_1C_1D$.

A_1C_1CA - квадрат, $\Rightarrow A_1C = \sqrt2 x$, т.к. это его диагональ.

треугольник A_1DC - прямоугольный. т.к. его ребра A_1D и DC лежат в гранях, которые перпендикулярны друг другу $\Rightarrow$ в перпендикулярных плоскостях

A_1D - катет. A_1C - гипотенуза $A_1D^2 = A_1C^2 - DC^2$

$$A_1D = \sqrt{(\sqrt2 x)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt3}\right)^2} = \sqrt{2x^2 - \frac{x^2}{3}} = \sqrt{\frac{6x^2}{3} - \frac{x^2}{3}} = \sqrt{\frac{5x^2}{3}}$$

$\Rightarrow A_1D = \frac{x\sqrt5}{\sqrt3}$ по теореме косинусов:

$A_1D^2 = A_1C_1^2 + C_1D^2 - 2 \cdot A_1C_1 \cdot DC_1 \cdot \cos\varphi$

$\frac{x^2 5}{3} = x^2 + \frac{4x^2}{3} - 2x \cdot \frac{2x}{\sqrt3} \cdot \cos\varphi \ \Big|: x^2$ $\frac{5}{3} = 1 + \frac{4}{3} - \frac{4}{\sqrt3}\cos\varphi$

$\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{\sqrt3}\cos\varphi$ $-\frac{2}{3} = -\frac{4}{\sqrt3}\cos\varphi$

$\frac{2}{3} = \frac{4\cos\varphi}{\sqrt3}$ $\cos\varphi = \frac{\sqrt3 \cdot x}{\ldots} = \frac{1}{2\sqrt3}$ Ответ: $\varphi = \arccos\frac{1}{2\sqrt3}$