11.1

М-11-45-14

Предположим, что это так.

1) по условию: $a+b+c+d=0$, где a, b, c, d - числа на окр-ти; из усл. следует:

$a+b=-(c+d)$

$a+c=-(b+d)$

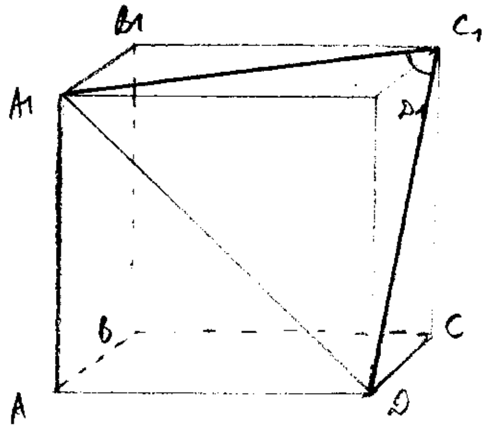
2) мы предположим, что $ab+bc+cd+da>0$, тогда $b(a+c)+d(a+c)>0$;

$(b+d)(a+c)>0$, но $a+c=-(b+d)$, тогда $-(b+d)^2>0 \Rightarrow (b+d)^2<0$ - неверно т.к. квадрат всегда положителен или равен нулю. Получили противоречие $\Rightarrow$ сумма не мож. быть положительной

Ответ: не может

7б

11.5



Дано: $A\dots D_1$ - прямоуг. парал-пед

A_1C_1 = одному из рёб. пар-педа

$C_1D \wedge$ ребро пар-педа $=30°$

Найти: $\angle A_1C_1D$ - ?

7б

Решение:

1) по теор. кос-ов в $\triangle A_1C_1D$: $A_1D^2=A_1C_1^2+C_1D^2-2A_1C_1\cdot C_1D\cdot\cos\angle A_1C_1D$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle A_1C_1D=\dfrac{-A_1D^2+A_1C_1^2+C_1D^2}{2\cdot A_1C_1\cdot C_1D}$; необход. выразить A_1C_1, C_1D и DA_1 через одну вел-ну

2) $A_1C_1=AA_1$ (верт. ребро пар-педа), т.к. $A_1C_1\neq A_1D_1, D_1C_1$, т.к. это катеты в прямоуг. $\triangle$-ке $A_1D_1C_1$, а гип-за A_1C_1 всегда > катетов

3) из п.2 следует, что $\angle C_1DD_1=30°$; $\triangle C_1DD_1$ - прямоуг., т.к. $\angle D_1=90° \Rightarrow C_1D_1=C_1D\sin 30 = \dfrac{C_1D}{2}$; пусть $C_1D - x$;

4) по теор. Пиф.: $DD_1^2=x^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{3x^2}{4}$; $DD_1^2=A_1C_1^2 \Rightarrow A_1C_1=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

5) по теор. Пиф.: $A_1D_1^2=A_1C_1^2-C_1D_1^2=\dfrac{3x^2}{4}-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{2x^2}{4}$; $A_1D_1=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$

6) $A_1D^2=A_1D_1^2+D_1D^2=A_1D_1^2+A_1C_1^2=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3x^2}{4}=\dfrac{5x^2}{4} \Rightarrow A_1D=\dfrac{x\sqrt{5}}{2}$ (по т. Пиф.)

7) возвр. к теор. кос-ов:

$$\cos\angle A_1C_1D=\frac{-\frac{x^2\cdot 5}{4}+\frac{3x^2}{4}+x^2}{2\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}\cdot x}=\frac{\frac{3x^2-5x^2+4x^2}{4}}{x^2\sqrt{3}}=\frac{\frac{2x^2}{4_2}}{x^2\sqrt{3}}=\frac{x^2}{2x^2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \angle A_1C_1D=\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Ответ: $\angle A_1C_1D=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

1	2	3	4	5	итог	подпись эксперта
7	7	7	7	7	35	[signature]
7	7	7	7	7	35	[signature]

(11.3) M-11-45-14

$\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} < 2219$; $n, \sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} \in N$; все n - ?

1) если $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} \in N$, то $\sqrt[8]{n} \in N$ $\underbrace{\left(\text{т.к. } \sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} = \sqrt{n} \cdot \sqrt[4]{n} \cdot \sqrt[8]{n}\right)}_{\text{это не является доказательством}}$

2) пусть $n = k^8$; $k > 0$*, тогда

$\sqrt{k^8} \cdot \sqrt[4]{k^8} \cdot \sqrt[8]{k^8} < 2219$

$k^4 \cdot k^2 \cdot k < 2219$

$k^7 < 2219$

* нет смысла расм. $k=0$ и $k<0$, т.к. при $k=0$ n - ненат. число, а при $k<0$ числа будут расм. дважды (напр. $|3^7| = |(-3)^7|$)

7б

3) мет. подбора:

$1^7 = 1$; $1 < 2219$ - верно

$2^7 = 128$; $128 < 2219$ - верно

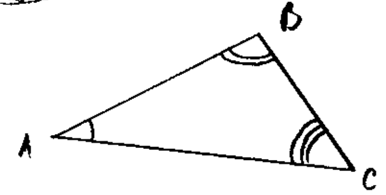
$3^7 = 3^4 \cdot 3^3 = 81 \cdot 27 = 2187$; $2187 < 2219$ - верно

$4^7 = 2^{14} = 2^{10} \cdot 2^4 = 1024 \cdot 16 = 16384$; $16384 < 2219$ - неверно $\Rightarrow$

$\Rightarrow k \in [1; 3] \Rightarrow n \in [1^8; 2^8; 3^8] \Rightarrow n_1 = 1, n_2 = 256, n_3 = 6561$

Ответ: $n_1 = 1$; $n_2 = 256$; $n_3 = 6561$

(11.2)



Дано: в $\triangle ABC$:

$\sin\angle A + \cos\angle B = \sqrt{2}$

$\cos\angle A + \sin\angle B = \sqrt{2}$

Найти: $\angle C$ - ?

Решение:

1) пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$;

2) $\sin\angle C > 0$ (т.к. ABC - Δ-к) ; $\sin\angle C = \sin(\pi - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$,

3) запишем систему:

$\begin{cases} \sin\alpha + \cos\beta = \sqrt{2} \\ \cos\alpha + \sin\beta = \sqrt{2} \end{cases}$; возв. в квадрат ;

$+\begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta = 2 \\ \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\cos\alpha\sin\beta = 2 \end{cases}$

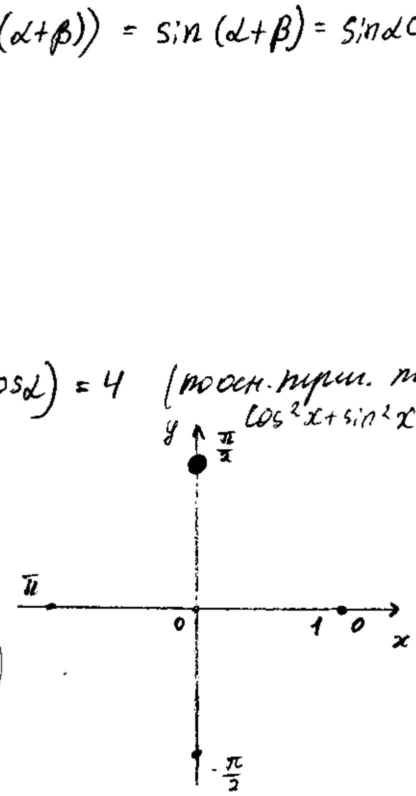
$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) + 2(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = 4$ (по осн. триг. тождеству: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

$1 + 1 + 2(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = 4$

$2(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = 2$

$\sin(\alpha+\beta) = 1 \Rightarrow \sin\angle C = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle C = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ рад $= 90°$



Ответ: $\angle C = \frac{\pi}{2}$ рад $= 90°$

7б

11.4

1) Рассмотрим таблицу 5×5 (т.к. $8 \equiv 3 \pmod 5$) => эта таблица повт. по гориз. и вертикали)

2) В каждом квадрате 3×3 сумма будет отриц., и при этом в квадрате 5×5 сумма будет положительна при след. размещении:

1	1	-2	1	1
1	1	-2	1	1
-2	-2	2	-2	-2
1	1	-2	1	1
1	1	-2	1	1

в таком квадрате:

1) сумма в кажд. квадрате 3×3 $= -8+6 = -2$

2) сумма всей таблицы $= 16+2-2\cdot 8 = 2$

⇓

схема подходит по усл.

⇓

таблица 8×8 будет выглядеть так:

Ответ:

1	1	-2	1	1	-2	1	1
1	1	-2	1	1	-2	1	1
-2	-2	2	-2	-2	2	-2	-2
1	1	-2	1	1	-2	1	1
1	1	-2	1	1	-2	1	1
-2	-2	2	-2	-2	2	-2	-2
1	1	-2	1	1	-2	1	1
1	1	-2	1	1	-2	1	1

3) теперь докажем, что это решение - единств. верное:

а) т.к. в каждом квадрате 3×3 сумма отрицательна, то необходимо расположить полож. и отриц. числа так, чтобы в кажд. кв. 3×3 они совпадали. Для этого необходимо чередование "2 через 1"

б) чтобы во всей таблице сумма была положительна, нужно, чтобы "отриц." клеток было наименьшее число. На примере таблицы 5×5 видно, что отриц. клеток будет наименьшее кол-во, если их расположить "по горизонт. и верт. оси" таблицы, но их модуль при этом должен быть больше, чем у полож. чисел, расп. не на оси. В центре можно расположить число >0 с макс. модулем, т.к. оно единственный раз попадает в кажд. квадрат 3×3.

в) числа 1, 2, −2 подходят, т.к.: $|-2| > |1|$ и $|2| > |1|$ (см. п. б)

Кол-во −2 равно ~~28~~ 24 + кол-во 2 − 4

Кол-во 1 равно 36

сумма чисел $= 36 - 2\cdot 2\cancel{8}4 + 8 > 0$. ~~Условие~~

выполнено

7

M-11-45-14