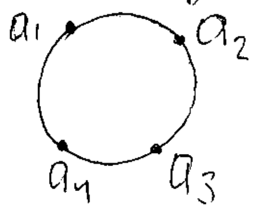
11.1 Пусть даны 4 числа: a_1, a_2, a_3, a_4



По условию сумма 4 чисел на окружности равна 0:

1	2	3	4	5	Итог	Подпись эксперта
7	7	7	7	6	34	
7	7	7	7	6	34	

$a_1+a_2+a_3+a_4=0 \Rightarrow$

$a_1+a_3=-(a_2+a_4)$ (1)

Тогда сумма произведений попарно соседних чисел равна:

$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1=a_2(a_1+a_3)+a_4(a_1+a_3)=$

$=(a_2+a_4)(a_1+a_3)$

Из равенства (1) видно, что $a_1+a_3=-(a_2+a_4)$, тогда

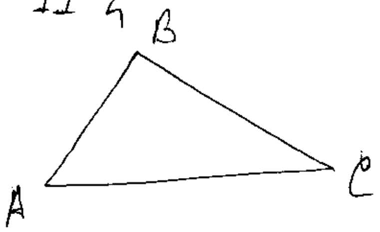
$(a_2+a_4)(a_1+a_3)=-(a_2+a_4)^2$

Таким образом мы видим, что выражение $(a_2+a_4)^2$ ~~неотрица~~ неотрицательно, а $-(a_2+a_4)^2$ неположительно. Полученная сумма положительной быть не может.

7

Ответ: Нет, не может.

11.2



Дано: $\begin{cases} \sin\angle A+\cos\angle B=\sqrt{2} \\ \cos\angle A+\sin\angle B=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \sin\angle A=\sqrt{2}-\cos\angle B \\ \cos\angle A=\sqrt{2}-\sin\angle B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\angle A=2-2\sqrt{2}\cos\angle B+\cos^2\angle B \\ \cos^2\angle A=2-2\sqrt{2}\sin B+\sin^2\angle B \end{cases} \Rightarrow$

Сложим получившиеся уравнения:

$\sin^2\angle A+\cos^2\angle A=4-2\sqrt{2}\cos\angle B-2\sqrt{2}\sin\angle B+\cos^2\angle B+\sin^2\angle B$

$1=4-2\sqrt{2}\cos\angle B-2\angle 2\sin\angle B+1$

$\sin\angle B=\pm\sqrt{1-\cos^2\angle B} \Rightarrow$

$2\sqrt{2}\cos\angle B\pm 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2\angle B}-4=0$

$2\sqrt{2}\cos\angle B-4=\mp 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2\angle B}$ | ^2

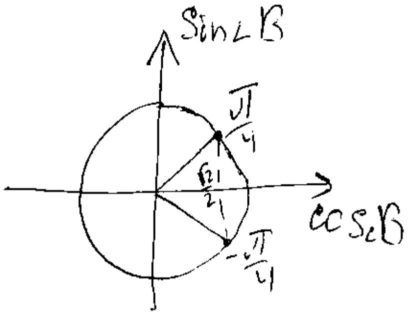
$2\sqrt{2}\cos\angle B - 4 = \mp 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2 B}\ |\ ^2$

$8\cos^2\angle B - 16\sqrt{2}\cos\angle B + 16 = 8(1-\cos^2 B)\ |:8$

$\cos^2\angle B - 2\sqrt{2}\cos\angle B + 2 = 1-\cos^2 B$

$2\cos^2\angle B - 2\sqrt{2}\cos\angle B + 1 = 0$

$(\sqrt{2}\cos\angle B - 1)^2 = 0 \Rightarrow \cos\angle B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$



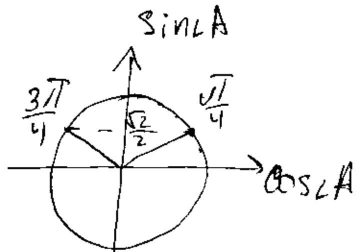
$\angle B = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in Z$

В треугольнике рассматриваем только положительные углы ⇒

$\angle B = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \Rightarrow$

7

$\angle A$: $\sin\angle A = \sqrt{2} - \cos\angle B = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$



$\angle A_1 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

$\angle A_2 = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$

Тогда найдём $\angle C$ в обоих случаях

1) $\angle C = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$

2) $\angle C = 180^\circ - \angle A_2 - \angle B = 180^\circ - 135^\circ - 45^\circ = 0$ − случай не удовлетворяет условию задачи

Ответ: $\angle C = 90^\circ$

11.3

$\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ − рассмотрим данное выражение.

Корень существует, когда $n \ge 0$, но n − натуральное ⇒ $n > 0$

$\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} < 2219$ (по условию)

$n\sqrt{n\sqrt{n}} < 2219^2$

$n^2 n\sqrt{n} < 2219^4$

$n^4 n^2 n < 2219^8$

$n^7 < 2219^8 \Rightarrow n < 2219\sqrt[7]{2219}$

Рассмотрим число $\sqrt[7]{2219}$

$\sqrt[7]{3^7} = \sqrt[7]{2187} = 3 < \sqrt[7]{2219}$ $\Rightarrow$

$\sqrt[7]{4^7} = \sqrt[7]{4^4 \cdot 4^3} = \sqrt[7]{256 \cdot 64} = \sqrt[7]{18384} = 4 > \sqrt[7]{2219}$

$\sqrt[7]{2219} \in (3;4)$; $\sqrt[7]{2219} = 3,\ldots$

Тогда $2219\sqrt[7]{2219} \cdot 3,\ldots = 6657,\ldots$

(т.к 2219 - простое число и при умножении на ~~чета~~ число, меньшее 1, но большее 0 не может давать целое число)

Таким образом, $n \in (0; 6657]$

Но выражение $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом (по условию). Найдём, что из себя представляет n:

Если $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ натурально и ~~чётно~~ цело, тогда выражения $n\sqrt{n\sqrt{n}}$, $n\sqrt{n}$, n должны представлять из себя чётную степень какого-то числа a, чтобы при извлечении корня получалось целое число. Так, выражения $\sqrt{n\sqrt{n}}$ и $\sqrt{n}$ также должны представлять из себя чётную степень числа, иначе $n \cdot \sqrt{n\sqrt{n}}$ и $n \cdot \sqrt{n}$ не смогут иметь чётную степень. Тогда минимальная степень n, удовлетворяющая всем данным условиям = 8 $\Rightarrow$

$n = a^8$, тогда $\sqrt{a^8\sqrt{a^8\sqrt{a^8}}} = \sqrt{a^8\sqrt{a^8 \cdot a^4}} = \sqrt{a^8 \cdot a^6} = a^7$

То есть n - это 8-я степень натурального числа $\Rightarrow$

a может быть равно:

1: $n = 1^8 = 1 \in (0; 6657]$

2: $n = 2^8 = 256 \in (0; 6657]$

3: $n = 3^8 = 2187 \in (0; 6657]$

4 а уже не может быть равно, т.к

$n = 4^8 = 18384 \notin (0; 6657]$

Ответ: $n=1$; $n=256$; $n=2187$

7

11.4

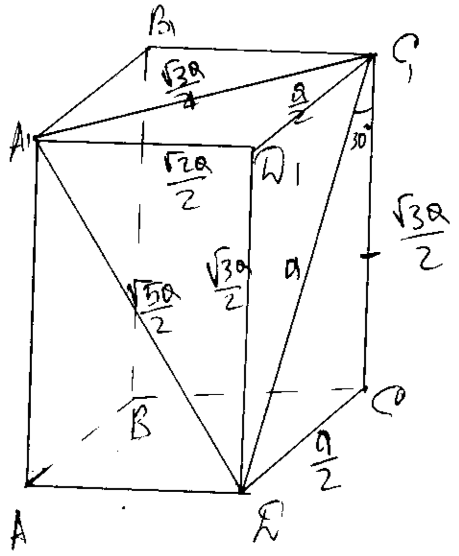
10	0	0	10	0	0	10	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-11	0	0	-11	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	10
0	0	-11	0	0	-11	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	10	0	0	10	0

Пусть ~~цы~~ цифры, влияющие на результат, будут отличными от нуля, а остальные $=0$.
Чтобы сумма всех чисел была положительной, нужно, чтобы сумма положительных чисел была больше, чем отрицательных, но, чтобы в каждом квадрате 3х3 сумма была отрицательной, нужно, чтобы сумма отрицательных чисел была больше, чем положительных.
Мы можем сделать вывод что одни и те же отрицательные числа ~~входит~~ входят в состав нескольких квадратов 3х3, то есть находились в центре квадрата 8х8. (Пример представлен на рисунке)
А ~~одни и те~~ положительные числа должны как можно реже встречаться им вовсе не входить в 1 квадрат 3х3, то есть находиться с краю квадрата 8х8.
Исходя из приведённого примера, в любой квадрат 3х3 ~~в~~ обязательно будет входить одна цифра -11 и, возможно (не везде) будет входить 1 цифра 10. В любом случае сумма внутри всех квадратов 3х3 будет отрицательной.
Сумма положительных $= 10 \cdot 8 = 80$ $\Rightarrow$ Общая сумма положительна
Сумма отрицательных $= -11 \cdot 4 = -44$

ч.т.д.

11.5

М-11-51-1



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоуг. пар
A_1C_1 = ребру. $\widehat{DC_1, \text{ребро}} = 30°$

Найти: $\angle \widehat{A_1C_1, C_1D} = \angle\alpha$

Решение:

1) Найдём, какому ребру $= A_1C_1$:

$A_1C_1 = \sqrt{A_1D_1^2 + D_1C_1^2} \Rightarrow A_1C_1$ не может быть равно A_1D_1 и D_1C_1 (т.

тогда либо A_1D_1, либо D_1C_1 были бы равны 0) $\Rightarrow$

$A_1C_1 = CC_1 \Rightarrow \angle DC_1C = 30° \Rightarrow$

$DC = \frac{1}{2} DC_1$ (по теореме)

Пусть $DC_1 = a$, тогда $DC = \frac{a}{2}$, тогда

$CC_1 = A_1C_1 = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow$

$A_1D_1 = \sqrt{A_1C_1^2 - D_1C_1^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}a}{2} \Rightarrow$

$A_1D = \sqrt{A_1D_1^2 + DD_1^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$

$A_1D^2 = A_1C_1^2 + C_1D^2 - 2A_1C_1 \cdot C_1D \cdot \cos\alpha$ (по теореме косинусов) $\Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{A_1C_1^2 + C_1D^2 - A_1D^2}{2A_1C\,C_1D} = \frac{\frac{3a^2}{4} + a^2 - \frac{5a^2}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot a} =$$

$$= \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{4a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{\sqrt{3}a^2} = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \angle\alpha = \cancel{60}\ 30°$$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}}$ арифметическая ошибка

Ответ: $\angle\alpha = \angle A_1C_1, C_1D = 30°$

6