УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

МБОУ "Лицей "РИТМ"

КОД

М – 11 – 13

МБОУ лицей «РИТМ»

1	2	3	4	5	Σ	Член жюри
7	6	7	7	7	34	[signature]
7	6	7	7	7	34	[signature]

11.1 7

1) Для того, чтобы определить, какой цифрой оканчивается сумма чисел, достаточно знать последнюю цифру в каждом слагаемом.

2) При перемножении двух чисел последняя цифра ~~зав~~ произведения зависит от последних цифр в каждом числе.

Демонстрация факта 1:

$$\overline{\ldots a} + \overline{\ldots b} = \ldots(a+b) \quad \cancel{(10-a-b)}, \text{ при } a+b<10$$

$$\overline{\ldots a} + \overline{\ldots b} = \ldots(a+b-10), \text{ при } a+b\geq 10$$

Демонстрация факта 2:

$$\overline{\ldots a} \times \overline{\ldots b} = \ldots a\cdot b, \text{ при } a\cdot b<10$$

$$\overline{\ldots a} \times \overline{\ldots b} = \ldots a\cdot b \bmod 10, \text{ при } a\cdot b\geq 10$$

Таким образом,

2021^6 оканчивается на 1 (та же посл. цифра, что и в 1^6)

2022^6 оканчивается на 4 (та же посл. цифра, что и в 2^6)

2023^6 оканчивается на 9 (та же последняя цифра, что и в 3^6)

2024^6 оканчивается на 6 (та же посл. цифра, что и в 4^6)

2025^6 оканчивается на 5 (та же посл. цифра, что и в 5^6)

~~а~~ сумма $2021^6+2022^6+2023^6+2024^6+2025^6$ оканчивается на ту же цифру, что и сумма $1+4+9+6+5$

Ответ: 5

КОД M-11-13

МБОУ лицей «РИТМ»

11. 2

6

Пусть x - число побед команды, S - общее кол-во игр команды, тогда

$$\frac{x}{S} + \frac{1}{6} = \frac{x+1}{S+1}$$

$$\frac{6x+S}{6S} = \frac{x+1}{S+1}$$

$$6Sx + 6x + S^2 + S = 6Sx + 6S$$

$$S^2 - 5S + 6x = 0$$

$D = 25 - 24x \geq 0$ т.к. должны быть корни

$$x \leq \frac{25}{24}$$

при этом $x \geq 0$ (по условию),

$x \in Z$

1) при $x = 0$:

$S^2 - 5S = 0$

$S_1 = 0$, тогда $\frac{1}{6} = \frac{1}{1}$, противоречие

$S_2 = 5$, тогда $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, верно

однако $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \neq \frac{1+2}{6+2}$, противоречие

Следовательно $x \neq 0$

2) при $x = 1$:

$S_1 = 2$

$S_2 = 3$

при $S = 2$:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$, верно

однако

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \neq \frac{2+2}{3+2}$

$\frac{20}{30} + \frac{5}{30} \neq \frac{24}{30}$, противоречие

при $S = 3$:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{4}$

$\frac{4}{12} + \frac{2}{12} = \frac{6}{12}$, верно далее по условию:

$\frac{2}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

$\frac{6}{12} + \frac{2}{12} = \frac{8}{12}$, верно

далее по условию:

$\cancel{\frac{4+a}{6+a} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}}$

$\cancel{30+5a = 24+6a}$

$\cancel{a = 6}$

$\frac{4+a}{6+a} \geqslant \frac{4}{6} + \frac{1}{6}$ откуда нер-во a - ?

$\frac{24+6a}{36+6a} \geqslant \frac{30+5a}{36+6a}$

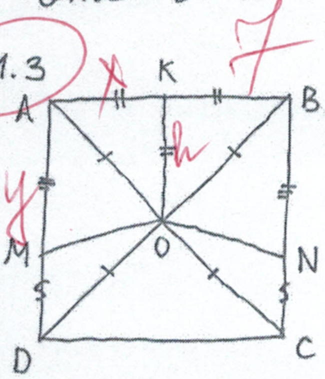
$\frac{a-6}{36+6a} \geqslant 0$

$a - 6 \geqslant 0$

$a \geqslant 6$; $\frac{4+6}{6+6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

Ответ: 6

11.3



Дано:

~~AB~~ $AK = KB$

$S_{MAKO} = S_{OKBN} = S_{DMONC}$

Пусть $AK = x$

ABCD - квадрат $\Rightarrow AO = OB \Rightarrow \triangle AOB$ - равнб $\Rightarrow OK$ - высота, медиана $\Rightarrow OK \cancel{=\frac{1}{2}} AB$ (медиана, выпущенная из прямого угла прямоуг. треугольника)

$S_{\triangle AKO} = \frac{1}{2}x^2$

~~$S_{\triangle AOM} = 1$~~

Пусть $AM = y$

$S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}y \cdot h = \frac{1}{2}xy$ (т.к. $h = OK$ т.к. $\triangle AOD = \triangle AOB$ т.к. ABCD - квадрат)

$S_{\triangle MOD} = \frac{1}{2}(2x - y)x = x^2 - \frac{1}{2}xy$

$S_{\triangle DOC} = 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot x = x^2$

По условию $S_{MAKO} = S_{OKBN}$

$S_{AKO} = S_{OKB}$ (т.к. OK - мед $\triangle AOB$) $\Rightarrow S_{\triangle AOM} = S_{\triangle OBN}$ (их высоты равны $OK \Rightarrow$ равны $\Rightarrow AM = BN$)

$AM = BN$; $AD = BC \Rightarrow MD = NC$

рассм $\triangle MOD$ и $\triangle ONC$
их высоты равны
$MD = NC$ $\Rightarrow S_{\triangle MOD} = S_{\triangle ONC} = x^2 - \frac{1}{2}xy$

Таким образом, $S_{MAKO} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy$; $S_{DMONC} = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}xy\right) + x^2$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy = 2x^2 - xy + x^2$$

$$2{,}5x^2 = 1{,}5xy$$

$$2{,}5x = 1{,}5y$$

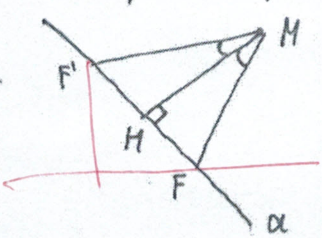
$$x = \frac{3}{5}y$$

$$\frac{AM}{MD} = \frac{y}{2x-y} = \frac{y}{\frac{6y}{5} - y} = \frac{y}{\frac{1}{5}y} = 5$$

Ответ: 1 : 5

11.4 7

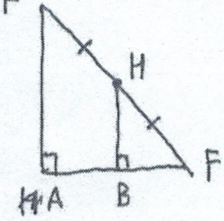
рассмотрим чертёж:



из точки M на прямую α опущен перпендикуляр MH, а также выпущены два луча, пересекающие прямую α так, что $\angle F'MH = \angle HMF$

Получаем: $\triangle F'MH = \triangle HFM$ (прям; HM-общ; $\angle F'MH = \angle HMF$)
Следовательно, $F'H = HF$

рассмотрим чертёж:

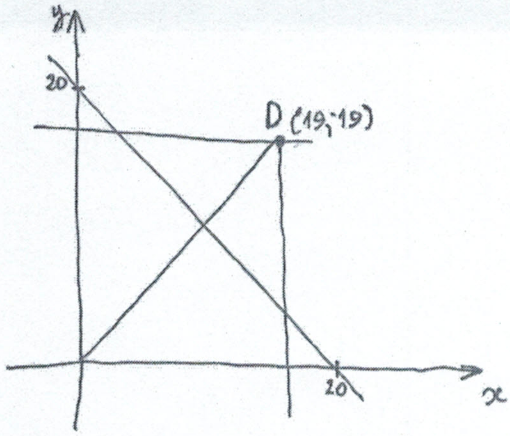


Проведём прямую $AF \parallel$ оси OX и опустим перпендикуляры $F'A$ и HB. $F'A \parallel HB$; $FF' \cap AF$, по теореме Фалеса:

$$\frac{F'H}{HF} = \frac{AB}{BF} \Rightarrow AB = BF$$

x-овая координата H = x-овой к. B ; аналогично x-овая к. F' = x-овой к. A. Получаем, сумма абсцисс F' и F равна удвоенной абсциссе H.

Теперь рассмотрим чертёж из условия задачи



Проводя все необходимые прямые под углом 9° друг к другу, мы получим 20 прямых: одна перпендикулярна прямой $y = 20 - x$, одна параллельна ей, а остальные 18 пересекают её. Причём 18 прямых делятся на 9 пар так что, в каждой паре углы между каждой прямой в этой паре и прямой $y = 20 - x$ равны.

Как мы уже ранее доказали, в каждой такой паре сумма абсцисс точек пересечения равна удвоенной абсциссе точки пересечения прямой $y = 20 - x$ и перпендикуляра к ней. Найдём её: уравнение перпендикуляра: $y = x$, тогда: $20 - x = x$

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

Таким образом, общая сумма равна $10 + 9 \cdot 2 \cdot 10 = 10 + 180 = 190$

Ответ: 190

11.5 7 М-11-13

Так как треугольники не пересекаются и не имеют общих вершин, 5 треугольников ~~используют~~ содержат 15 ~~вершин~~ точек $\Rightarrow$ 25 ~~вершин~~ точек свободны.

Заметим, что 15 ~~вершин~~ точек делять окружность на 15 дуг, а остальные 25 точек лежат на этих дугах. По принципу Дирихле, существует дуга, на которой будет лежать ~~2~~ хотя бы 2 свободных точки.

Если существует дуга с 3 или более свободными точками, то построить треугольник можно, соединив 3 из них.

Если же на каждой дуге максимум 2 свободных точек, то существует минимум 10 дуг с 2 точками.

Назовём дугу изолированной, если в ней находится 1 или 2 точки, и она огорожена от других дуг ~~стороной~~ стороной треугольника, иначе дуга свободна.

Пример:

Очевидно, что каждый треугольник может создать не более 2 изолированных дуг, иначе всего точек будет максимум $3+6=9$ (см. определение)

Следовательно, 5 треугольников создадут максимум 10 изолированных дуг.

Если все изолированные дуги содержат по 2 ~~вершины~~ точки, то существует случай, когда на остальных дугах по одной ~~вершине~~ точке. Вот он

Этот случай предполагает, что на остальных дугах будет по 1 ~~вершине~~ точке, которые можно соединить, как показано на чертеже.

В остальных случаях существует свободная дуга с 2 точками которую не можно соединить с одной из точек другой свободной дуги (иначе дуга не свободна). Получается, что мы в любом случае сможем построить ещё один треугольник.

Ч.т.д.