М-9-11.

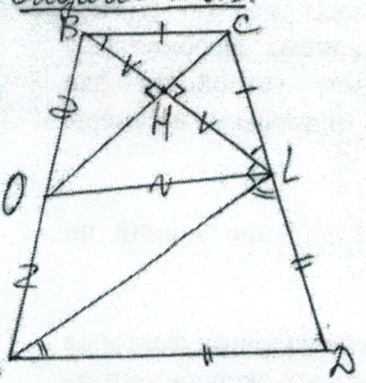
МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
Г. ХАБАРОВСКА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ»
Комсомольская ул. д 118, г. Хабаровск, 680038
Тел.:(4212)57-55-53

1	2	3	4	5
3	7	7	5	04

9

26

Задача №9.3.



Дано: $ABCD$ - трапеция ($BC \parallel AD$)
$AB = CD = AD + BC$.
$L \in CD$; $CL = BC$.
$O \in AB$; $AO = OB$

Д-ть: $BL \perp OC$

76

Доказательство.

1.) Т.к. $CD = AD + BC$ - по условию и $BC = CL$, тогда $LD = CD - CL = AD$

2) Рассм. $\triangle BCL$: $BC = CL$ - по условию, тогда $\triangle BCL$ - равнобедренный и $\angle CBL = \angle CLB$.
Пусть CH - высота и медиана $\triangle BCL$ (т.к. $\triangle BCL$ - равнобедренный), тогда $BH = HL$ и $CH \perp$
Пусть $\angle CBL = \angle CLB = \alpha$, тогда $\angle BCL = 180° - 2\alpha$.

3) Т.к. $ABCD$ - трапеция и AD и BC - основания, т.е. $AD \parallel BC$, тогда $\angle BCD + \angle ADC = 180°$ - односторонние при $BC \parallel AD$ и секущей CD, если $\angle BCL = 180° - 2\alpha$, тогда $\angle ADC = 180° - \angle B$
$\angle ADC = 180° - 180° + 2\alpha = 2\alpha$.

4) Рассмотрим $\triangle ADL$: $AD = DL$, тогда $\triangle ADL$ - равнобедренный и $\angle DAL = \angle ALD = (180° - \angle ADL)$:
$\angle DAL = \angle ALD = \dfrac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$.

5) ~~Т.к.~~ $\angle DLA + \angle ALB + \angle CLB = 180°$ - смежные, т.к. $\angle BLC = \alpha$ и $\angle ALD = 90° - \alpha$, то
$\angle BLA + \alpha + 90° - \alpha = 180°$, то $\angle BLA = 90°$

6) Рассм. $\triangle BLA$: $AO = OB$ - по условию, тогда LO - медиана и $LO = \frac{1}{2}AB = OB = OA$ (т.к. $\angle BLA = 90°$)

7) Рассм. $\triangle BOL$: $BO = OL$, тогда $\triangle BOL$ - равнобедренный т.к. $BH = HL$, то OH - медиана и высота $\triangle BOL$ (т.к. $\triangle BOL$ - равнобедренный), тогда $OH \perp BL$

8) Т.к. $CH \perp BL$ и $OH \perp BL$, тогда точки O, H, C лежат на одной прямой OC,
$OC \perp BL$ - ч.т.д.

Задача №9.4

a, b - взаимнопростые; p - простое
$(a+b) \vdots p$, то $a + b = p \cdot x$, где $x \in Z$
$(a^2 + 4b^2) \vdots p$, то $a^2 + 4b^2 = p \cdot y$, где $y \in Z$.
Т.к. $a + b = px$, то $a = px - b$, тогда $a^2 + 4b^2 = (px - b)^2 + 4b^2 = p^2x^2 - 2pxb + b^2 + 4b^2 =$
$= p^2x^2 - 2pxb + 5b^2$, т.к. $py = a^2 + 4b^2$, то $p^2x^2 - 2pxb + 5b^2 = p \cdot y$
$5b^2 = py - p^2x^2 + 2pxb = p(y - px^2 + 2xb)$, значит $5b^2 \vdots p$, тогда $5 \vdots p$ или $b^2 \vdots p$,
p - простое, те $b \vdots$

М-9-11

МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
Г. ХАБАРОВСКА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ»
Комсомольская ул. д.118, г. Хабаровск, 680038
Тел (4212)57-55-53

1) $5 \vdots p$, т.к. p - простое число, то единственное возможное значение p - это $p=5$

2) $b \vdots p$, по условию $(a+b) \vdots p$, пусть если $b \vdots p$, то $b = p \cdot q$, где $q \in Z$, тогда
$a+b = a+pq = px \Rightarrow a = px - pq = p(x-q)$, значит $a \vdots p$, но по условию
a и b взаимнопростые, т.е. у них нет общих делителей, кроме 1, а в данной случае
у a, b получился общий делитель p, значит получили противоречие условию и $b \not\vdots p$
(где $p \neq 1$, т.к. p-простое число)

Значит единственное возможное значение $p=5$.

Ответ: $p=5$.

5б

Нет примера

Задача № 9.2

$ABACADAEA \vdots 11$, тогда $(A-B+A-C+A-D+A-E+A) \vdots 11$,
$A-B+A-C+A-D+A-E+A = 5A-B-C-D-E = 11x$, где $x \in Z$.

7б

т.к. надо найти наименьшее возможное число такого вида, то цифра, стоящая в старшем разряде равна 1, т.е. $A=1$, т.к. первая цифра числа не равна нулю.
Далее чтобы число было наименьшим $B=0$; $C=2$.
Тогда $5A-B-C-D-E = 5-0-2-D-E = 3-D-E = 11x$, чтобы число было минимальным
нам D, E - минимальны, но т.к. уже заняты цифры $0,1,2$, то $3-D-E \neq 0$, значит
$3-D-E=-11$, т.е. $x=-1$, т.к. значения D и E могут быть $3,4,5,6,7,8,9$, то
максимальное значение $3-D-E = 3-3-4 = -4$, а минимальное: $3-8-9 = -14$, кратное 11 число от -14 до -4, это -11.
тогда $3-D-E = -11$
$D+E = 14$, тогда пары D, E могут иметь значения $(5;9)$, ~~(8;6)~~ ~~(9;5)~~ $(6;8)$.
т.к. нам нужно найти наименьшее число, то $D<E$, т.е. либо $D=5; E=9$, или $D=6; E=8$
т.к. $101215191 < 101216181$, то $D=5$; $E=9$.

Значит минимальное число, которое может быть на доске равно 101215191.

проверим: $1-0+1-2+1-5+1-9+1 = -11 \vdots 11$.

Ответ: 101215191.

М-9-11

МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
Г. ХАБАРОВСКА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ»
Комсомольская ул. д.118, г. Хабаровск, 680038
Тел:(4212)57-55-53

Задача № 9.5.

1) Найдём общее число дорог в стране:

т.к. из каждого города выходит по 3 дороги, каждая соединяет 2 города и из страны выходит 3 дороги; пусть городов всего n штук, тогда $\frac{n-1}{2}\cdot 3$ дороги соединяют города, ~~т.к.~~ $\cancel{\frac{n\cdot 3}{2}}$ ~~— всего дорог, если бы каждая соединяла 2 города; и 3 дороги уходят из страны, то~~ $\cancel{\frac{n\cdot 3}{2}-3=n\cdot 3-}$ почему?

и 3 дороги уходят из страны. Считая общее число дорог, можно представить, что $(n-1)$ город соединены между собой дорогами так, что из каждого города выходят по 3 дороги, и ещё один город (n-ный) не соединен со всеми городами, но из него выходят 3 дороги, входящие из страны, тогда общее число дорог $=\frac{(n-1)3}{2}+3$, т.к. ~~что~~ $k\in N$, тогда $\frac{(n-1)\cdot 3}{2}\in N$, значит $(n-1)3 \vdots 2 \Rightarrow (n-1)\vdots 2$, т.е. $(n-1)$ — чётное число, тогда n — нечётное число. Значит условие данной задачи будет соблюдаться только для нечётного количества городов. Не доказано

2) Пусть хотя бы две из дорог, выходящих из страны, будут одного цвета, тогда хотя бы одного цвета не будет среди цветов, в которые покрашены дороги выходящие из страны, тогда дорог этого цвета будет $\frac{n}{2}$, т.к. из каждого из n городов, по условию выходят дороги всех трёх цветов, и каждая будет соединять 2 город. +

Т.к. из пункта 1 найдено, что количество городов n — нечётное, тогда $\frac{n}{2}\notin N$, но количество дорог — это натуральное число, значит получим противоречие, следовательно не будет двух дорог, выходящих из страны одного цвета, значит все дороги, выходящие из страны будут разных цветов.

4б

Д-во при усл. нечётного n

Д-во для нечётного случае

Задача № 9.1

$2x^2-10ax+p=0$, где p — простое, $a\in R$

$x^2-5ax+\frac{p}{2}=0$

по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=5a \\ x_1\cdot x_2=\frac{p}{2} \end{cases}$$

т.к. $x_1\in Z$ и $x_2\in Z$ по условию, то $\frac{p}{2}\in Z$, значит $p\vdots 2$, если p — простое, то $p=2$, тогда (т.к. 2 — единств. простое чётное) $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-2 \end{cases}$ Нет

3б

Значит $x_1+x_2=1+2=3=5a$, тогда $a=\frac{3}{5}=0{,}6$,
или $x_1+x_2=-1-2=-3=5a$, тогда $a=\frac{-3}{5}=-0{,}6$.

Ответ: $a=0{,}6;\ a=-0{,}6$. —