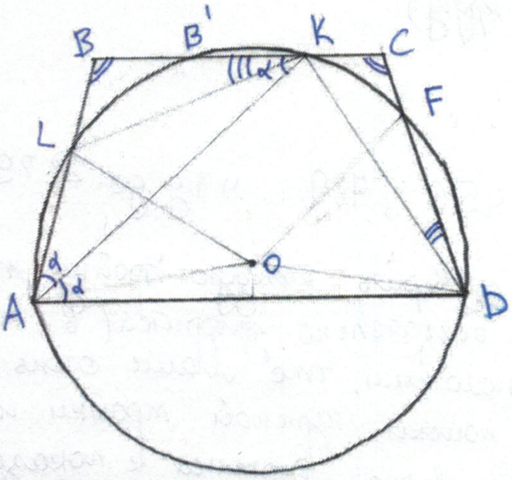
М-10-14

1	2	3	4	5
7	7	7	x	0

21

№10.2



Дано: ABCD – равнобедр. трапеция,
$AB=CD$
AK – биссектрисса, $\angle BAK = \angle KAD = \alpha$
Док-ть:
$BL=KC$

Доказательство:

1) Так как ABCD – трапеция, $AD \parallel BC$, тогда при секущей AK $\angle BKA = \angle KAD = \alpha$ (накрест лежащие)

2) $\angle BAK = \angle BKA = \alpha$, тогда $\triangle BAK$ – равнобедр. $\Rightarrow BA = BK = CD$ (из равенства $AB=CD$ по условию)

3) По свойству равнобедренной трапеции $\angle ABK = \angle KCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 2\alpha$

4) $\smile LFD = \angle LOD$ – центральный
$\smile LFD = \cancel{\angle}2\angle LAD$ – вписанный $\Big\} \Rightarrow \angle LOD = 2\angle LAD = 4\alpha$

Аналогично доказывается, что $\angle AOF = 2\angle FDA = 4\alpha$

5) $\angle LOD = \angle AOF = 4\alpha$ (из п.4)
$\angle LOF$ – общая часть $\Big\} \Rightarrow \angle AOL = \angle FOD = 4\alpha - \angle LOF \Rightarrow$
$\Rightarrow \breve{AL} = \breve{FD}$

6) $\angle KAD$ – вписанный $\Rightarrow \smile KD = 2\angle KAD = 2\alpha$, тогда $\breve{KF} = \breve{KD} - \breve{FD} =$
$= 2\alpha - \breve{FD} \Rightarrow \angle KDF = \frac{1}{2}\breve{KF} = \alpha - \frac{\breve{FD}}{2}$

7) $\angle B'KA$ – вписанный $\Rightarrow \smile B'A = 2\angle B'KA = 2\alpha$, тогда $\breve{LB'} = \breve{AB'} - \breve{LA} =$
$= 2\alpha - \breve{AL} \Rightarrow \angle B'KL = \angle BKL = \frac{1}{2}\breve{LB'} = \alpha - \frac{\breve{AL}}{2}$

8) Из п.5, п.6 и п.7 видим, что $\breve{AL} = \breve{FD}$; $\angle KDF = \alpha - \frac{\breve{FD}}{2}$;
$\angle BKL = \alpha - \frac{\breve{AL}}{2}$, значит $\angle KDF = \angle BKL$

Лист 1

9) $BK = CD$ (из п. 2)
$\angle LBK = \angle KCD$ (из п. 3)
$\angle KDC = \angle BKL$ (из п. 8)
$\Rightarrow \Delta LBK = \Delta KCD$ (по стороне и двум углам)
$\Downarrow$
$LB = KC$ (как соответственные элементы),
что и требовалось доказать.

№10.3

$a+b \vdots p \Rightarrow a+b = pm$, где m - целое число
$a^2+4b^2 \vdots p \Rightarrow a^2+4b^2 = pn$, где n - целое число

Посмотрим на результаты в зависимости от четности a и b:

1) $a \vdots 2$, $b \vdots 2$
Получается противоречие условию, что a и b взаимно простые, а значит такого случая не существует.

2) $a \not\vdots 2$; $b \not\vdots 2$
Сумма $a+b$ будет являться четным числом (нечетное + + нечетное = четное), а значит делиться на 2. Если p содержит множитель 2 (а то есть $p=2$ так как p - простое), то следующая сумма $a^2+4b^2 = (\text{нечет.})^2 + \text{чет.} \cdot (\text{нечет.})^2 =$ $=$ нечет. + чет. = нечетное – не делится на $p=2$, значит такой ситуации не существует. Если $p \neq 2$ смотрим в п. 3

3) $a \vdots 2$, $b \not\vdots 2$ (или $a \not\vdots 2$, $b \vdots 2$) и $p \neq 2$
Выразим a и b из первой суммы:
$a = pm - b$ $\qquad$ $b = pm - a$
Нужен пример, что для чисел такого вида выполняется усл. зад
И поочередно подставим их во второе равенство:
$a^2+4b^2 = (pm-b)^2 + 4b^2 = p^2m^2 - 2bpm + b^2 + 4b^2 = p^2m^2 - 2bpm +$ $+5b^2 = pn$
$p^2m^2 \vdots p$; $2bpm \vdots p$; $pn \vdots 4$, следовательно $5b^2 \vdots p$
(иначе невозможно равенство)

№10.3 (продолжение)

$a^2+4b^2 = a^2 + 4(pm-a)^2 = a^2 + 4(p^2m^2 - 2pma + a^2) = a^2 + 4p^2m^2 +$
$+4a^2 - 8pma = 5a^2 + 4p^2m^2 - 8pma = pn$
$\qquad\qquad \vdots p \qquad \vdots p \qquad \vdots p$

$5a^2 \vdots p$, иначе невозможно равенство

Получается, что $5a^2 \vdots p$ и $5b^2 \vdots p$

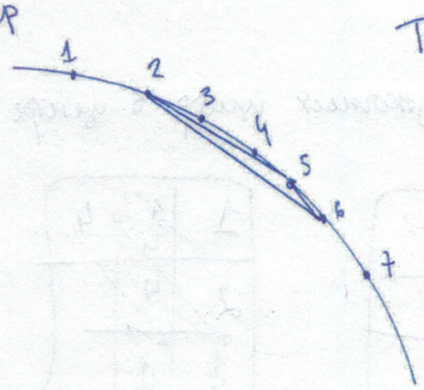
a и b взаимнопростые, значит не существует такого делителя, для которого верно: $a \vdots p'$ и $b \vdots p'$, а соответственно и $a^2 \vdots p'$ и $b^2 \vdots p'$. Тогда единственным решением является $p=5$

Ответ: p может принимать единственное значение $p=5$

№10.5

Введём обозначения. "Занятые" точки - точки, которые являются вершинами треугольников. Изначально имеется $5 \cdot 3 = 15$ занятых точек. "Отсечённые" точки - точки, с которыми невозможно образовать треугольник без пересечения уже имеющихся отрезков.

Например

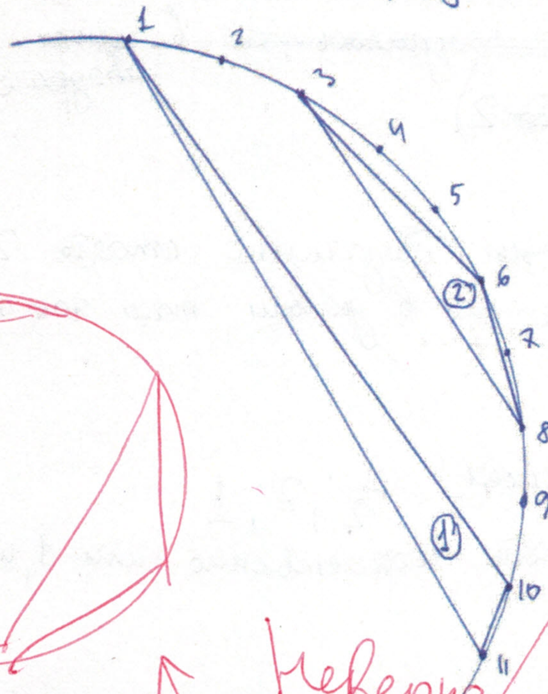


Точки 2, 5 и 6 являются занятыми
3 и 4 - отсечёнными, а
1 и 7 - свободными

Заметим, что подряд или находиться в одной области (область ограничена окружностью или отрезками) не может находиться три или более отсечённые точки, так как с ними можно будет образовать треугольник без пересечений с отрезками. Такие точки будут свободными (*)

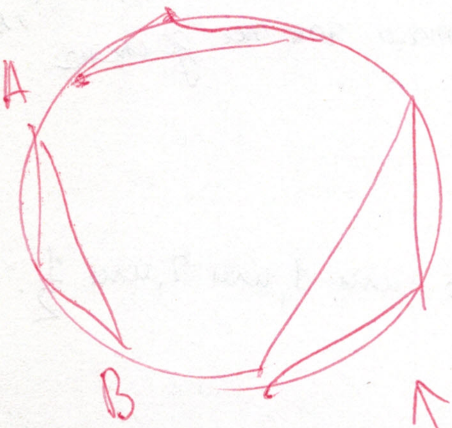
Отсеченные точки также образуются между двумя треугольниками.

Например:



Точки 1, 3, 6, 8, 10 и 11 - занятые

Точки 2, 4, 5, 9 - отсеченые



Неверно

Например, отрезок АВ

Заметим, что каждый треугольник отсекает не больше 4-х точек. (□)

Каждый отрезок треугольника образует область ограниченую либо им самим и окружностью, либо им самим, двумя дугами окружности и каким-то уже имеющимся отрезком другого треугольника. В какой-то из областей будет больше 3-х точек, эта область свободная, две другие отсекают не больше 2-х (по предположению *) - это верно, если новый образованый треугольник не находился в уже созданной области при создании которой не было отсечено ни одной точки. В этом случае все точки лежащие в областях образованной двумя дугами и двумя отрезками при отсечении „присваиваются" уже существовавшему треугольнику, а в областях образованых дугой и отрезком - новому треугольнику. Например на рисунке выше точки 4, 5 и 7 „принадлежат" треугольнику (2), а точки 2 и 9 треугольнику (1). Но и в таком случае в каждой из "своих" областей треугольника не больше двух отсеченных точек, а значит этому треугольнику принадлежит не больше 4-х отсеченных точек.

Исходя из предположения □ и того, что у треугольника 3 вершины, то есть три занятые точки, делаем вывод, что каждый треугольник может делать "недоступными" не более 7 точек.

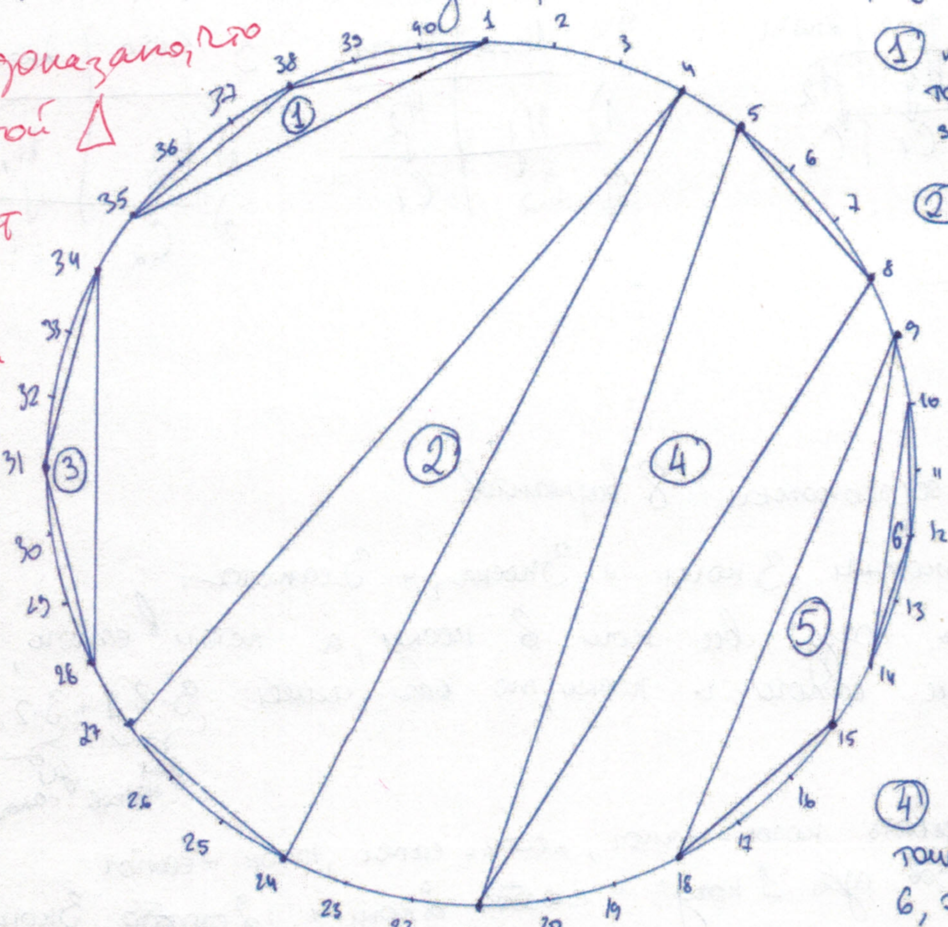
Б10.5 (продолжение)

... тогда 5 треугольников делают "недоступными" не более $7 \cdot 5 = 35$ точек. Всего в кругу 40 точек. $40 - 35 = 5$ свободных точек. На 5 свободных точках (минимум 5, может оказаться и больше свободных точек) мы точно можем расположить хотя бы один треугольник.

Рассм. частные сл.

Пример того, как могут располагаться треугольники:

Не доказано, что шестой △ не будет перес. с ост.



1 треугольник: точки 1, 35, 38 – заняты 36, 37, 39, 40 – отсечены

2 треугольник: точки 4, 24, 27 – заняты 25, 26 – отсечены

3 треугольник: точки 28, 31, 34 – заняты 29, 30, 32, 33 – отсечены

Точки 2 и 3 отсечены, но находятся не в "своей" области, поэтому "присваиваем" треугольнику 2

4 треугольник: точки 5, 8, 21 – заняты 6, 7, 22, 23 – отсечены

5 треугольник: точки 9, 15, 18 – заняты; 20, 19, 17, 16 – отсечены

Каждый треугольник отсёк по 4 точки. Осталось 5 свободных, в которых и расположится 6-ой треугольник.

№10.1

$a \neq b \neq c$

$a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$

Посмотрим на равенство $a^2 - bc = b^2 - ac$:

$a^2 - bc = b^2 - ac$

$a^2 - b^2 = bc - ac$

$(a-b)(a+b) = -c(a-b)$, так как $a \neq b$ по условию, мы можем разделить обе части на $(a-b) \neq 0$

$a + b = -c$

$c = -(a+b)$

Аналогично из равенств $b^2 - ac = c^2 - ab$ и $a^2 - bc = c^2 - ab$ можно получить, что $a = -(b+c)$ и $b = -(a+c)$

Подставим вместо a, b и c в числителях дробей их замены:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} = \frac{-(b+c)}{b+c} + \frac{-(a+c)}{a+c} + \frac{-(a+b)}{b+a} =$$

$= -1 + (-1) + (-1) = -3$

Ответ: выражение может принимать единственное значение равное -3.