1	2	3	4	5
?3	7	X	5	6 (4)

19

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников

по математике

Шифр М-9-10

№1

Пусть уравнение $2x^2 - 10ax + p = 0$ имеет целые корни x_1, x_2. По теореме Виета имеем: $x_1 \cdot x_2 = \frac{p}{2}$. Но т.к. x_1 и x_2 — целые, то их произведение также является целым числом. Значит $p \vdots 2$. Но единственное простое число, кратное двум это есть 2.

Получаем, что $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{2} = 1$. Но тогда либо $x_1 = x_2 = 1$, либо $x_1 = x_2 = -1$, т.к. если x_1 или x_2 по модулю больше 1, то нет такого целого числа, которое в произведении с ними дало единицу. Но тогда уравнение ни при каком a не будет иметь больше 1 целого корня.

Ответ: $a \in \varnothing$.

№2

Число кратно 11 если его знакочередующаяся сумма цифр равна или кратна 11. Значит $(A + 5 - (B + C + D + E)) \vdots 11$. Первая цифра числа не может быть равна 0, значит $A \geq 1$.

Рассмотрим случай, когда $A = 1$. Посчитаем максимальное и минимальное возможные значения знакочередующейся суммы в этом случае:

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников

по Математике

Шифр M-9-10

№ 2 (продолжение)

1. Максимальное значение достигается при минимальной сумме $B+C+D+E$, то есть при $0+2+3+4=9$. Значит, максимальное значение суммы равно $1\cdot5-9=-4$.

2. Минимальное значение достигается при максимальной сумме $B+C+D+E$, то есть при $6+7+8+9=30$. Значит, минимальное значение суммы равно $1\cdot5-30=-25$.

В промежутке от -4 до -25 может 2 числа, кратные 11: -11 и -22. Найдём минимальные числа с знакопеременной суммой цифр, равной -11, -22 вида $\overline{ABACADAEA}$ и сравним их между собой. Для -11 это число 101215101. Для -22 это число 13171819, число 101215101 меньше, следовательно, это и есть минимальное число, удовлетворяющее условию.

Ответ: 101215101

№ 4

$a+b\equiv a^2+4b^2\equiv 0 \pmod p$

т.к. $(a+b)\,\vdots\, p$, то и $(a+b)^2\,\vdots\, p$

$a^2+2ab+b^2\equiv 0 \pmod p$

№4 (продолжение)

Если из числа кратного p вычесть другое число кратное p, то результат тоже будет кратен p.

$a^2+2ab+b^2-a^2-4b^2 \equiv 0 \pmod p$

$2ab-3b^2 \equiv 0 \pmod p$

$b(2a-3b) \equiv 0 \pmod p$, значит, либо $b \vdots p$, либо $(2a-3b) \vdots p$ (т.к. p — простое). Но b не может быть кратно p, т.к. тогда из того что $(a+b) \vdots p$ следует то, что $a \vdots p$. Значит a и b не взаимно-простые, что противоречит условию. Значит, $2a-3b \equiv 0 \pmod p$ и

$2a-3b-(a+b)-(a+b) \equiv 0 \pmod p$

$-5b \equiv 0 \pmod p$, а т.к. $b \not\vdots p$, то

$-5 \equiv 0 \pmod p$, а значит, $p=5$.

Ответ: только $p=5$.

5б

Нет примера

№5

Рассмотрим 2 случая:

1. Кол-во городов чётно: Заметим, что если смотреть на дороги одного конкретного цвета, то они делят города на пары, т.к.

Не все

одной дороге соответствуют ровно два города, а каждому городу — одна дорога

М-9-10

№5 (продолжение)

Тогда город без пары имеет дорогу, выходящую из страны. (Эту мысль я буду использовать и во втором пункте). Тогда если городов чётное кол-во, то городов без пары тоже чётное кол-во, т.к. сумма трёх чётных чисел (кол-во городов без пары для каждого типа дорог) не может быть равна 3. Значит, городов нечётное количество.

Это 3 нечётных

2. Если городов нечётное кол-во: значит, для каждого типа дорог кол-во городов без пары также нечётно. А единственные три нечётных натуральных числа, в сумме дающие 3, это 1, 1 и 1. Вывод: из страны выходит ровно 3 дороги, и они все разного цвета. Ч.т.д.

Не доказано, что мн-ва непарных городов не пересекаются.

4б