$\frac{1}{3}\ \Big|\ \frac{2}{7}\ \Big|\ \frac{3}{7}\ \Big|\ \frac{4}{5}\ \Big|\ \frac{5}{7}$ 20 29

УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

КОД M-9-19

МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

Лист 1.

№9.4

Лемма 1: $a \not\vdots p$ и $b \not\vdots p$.

Док-во: предп. обратное. Тогда, т.к. $a+b \equiv 0 \pmod{p}$ и ~~одно~~ одно из них делится на p, то второе делится на p. Тогда p — общий простой делитель чисел a и b, но НОД$(a;b)=1$ (по усл.). Противоречие.

~~$a+b$~~ Все дальнейшие сравнения будут выполняться по модулю p.

$\begin{cases} a+b \equiv 0 & \text{- усл. 1} \\ (a^2+4b^2) \equiv 0 & \text{- усл. 2} \end{cases}$ | усл. 1 $\Leftrightarrow (a+b)^2 \equiv 0 \Leftrightarrow$ (1) $a^2+b^2+2ab \equiv 0.$

~~усл. 2 (1)~~

$\begin{cases} (1) \\ \text{усл. 2} \end{cases}$ $\ominus$ (вычтем из усл. 2 (1))

$a^2+4b^2-a^2-b^2-2ab \equiv 0 \Leftrightarrow$

$3b^2-2ab \equiv 0 \Leftrightarrow$

$b(3b-2a) \equiv 0 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} b \equiv 0 \text{ - не подх. по Лемме 1,} \\ 3b-2a \equiv 0 \end{array}\right.$

т.е. $3b-2a \equiv 0.$

М-9-19

Лист 2.

$$\begin{cases} 3b - 2a = 0 \\ 2(a+b) = 0 \end{cases}$$ (равносильно с усл. 1) ⊕

$5b = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 5 \vdots p \iff \\ b \vdots p \end{array}\right. \implies \boxed{p = 5}$$ т.к. p-простое и $b \vdots p$ по условию 1.

№9.1

$2x^2 - 10ax + p = 0$.

Д-но, что не сущ-т 2-х разных целых корней

По т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{10a}{2} = 5a, \\ x_1 x_2 = p/2 \end{cases}$$

1) $p = 2$:

$x_1 x_2 = 1$, т.е.

$x_1 = x_2 = 1$, т.к.

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

2) $p \neq 2$;

$(p/2) \notin \mathbb{Z} \implies$

$$\implies \left[\begin{array}{l} x_1 \notin \mathbb{Z} \\ x_2 \notin \mathbb{Z} \end{array}\right.$$, т.е. усл. не выполняется.

Корень всего 1 что не подходит по условию.

−

3б

Ответ: $a \in \varnothing$

УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

КОД

М-9-19

Лист 3.

№9.2

$\overline{ABACADAEA} : 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(A - B + A - C + A - D + A - E + A)}_{\parallel} : 11$

$5A - (B + C + D + E)$

$\exists\ A = 1$, тогда:

$(5 - (B + C + D + E)) : 11$

$\Leftrightarrow$

$B + C + D + E \equiv 5 \pmod{11}$

$\min(B + C + D + E) = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$

$\max(B + C + D + E) = 9 + 8 + 7 + 6 = 30.$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow (\underset{0}{\underset{\parallel}{B}} + \underset{2}{\underset{\parallel}{C}} + \underset{5}{\underset{\parallel}{D}} + \underset{9.}{\underset{\parallel}{E}}) \in \{16; 27\}$

Искомое число: 101215191.

Предп., что можно найти число меньше:
Если изменить цифру „A“, то число увеличится,
Т.к. A — минимально.
Аналог. для „B“ и „C“.
Уменьшив „D“, чтобы число делилось на
11, придётся увеличить „A“, „B“, „C“ или „E“.
„E“ — уже максимально, а увелич... „...“ ... „C“

М-9-19. Лист 4.

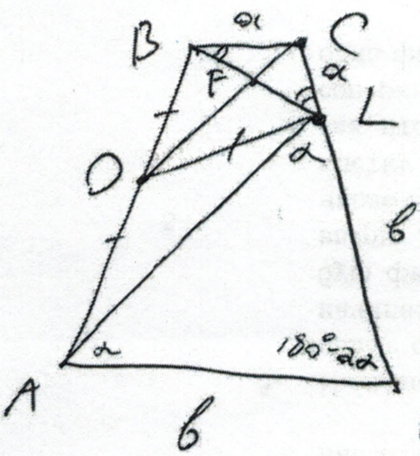
увеличит число.

При уменьшении „Е" придётся увеличить „А", „В" или „С", что также увеличит число.

7б

Ответ: 101215191.

№9.3.



$\exists\ BC = a,\ AD = b$

$LD = CD - CL = (a+b) - a = b \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ADL$ − р/б $\Rightarrow \angle LAD = \angle ALD = \alpha$

$BC = CL = a \Rightarrow \triangle BCL$ − р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBL = \angle CLB = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$

(т.к. $\angle C = 180° - \angle D = 2\alpha$).

$\angle BLA = 180° - \alpha - 90° + \alpha = 90°$ ($\triangle ABL$ − прямоуг.)

$\Rightarrow AO = OB = LO$ (LO − медиана из вершины прямого угла). $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BOL$ − р/б.

$\exists\ OF$ − медиана (и высота) $\triangle BOL$.

Т.к. F − середина BL, CF − медиана $\triangle BCL$ и высота, т.к. BCL − р/б.

$\angle BFC = 90° = \angle BFO$, т.е. $\angle OFC = 180° = \angle BFC + \angle BFO$, т.е. $(\cdot)F \in OC$.

Т.к. $\angle BFO = 90°$,

$OC \perp BL$ − чтд

7б

УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

КОД
M-9-19.

Лист 5.

№ 9.5.

∃ k — кол-во городов в строке.

Предположим обратное (есть хотя бы 1 цвет в который не покрашена ни 1 дорога, выходящая из страны).

1) k — ~~неч~~.

Р-м граф, где вершины — города, а рёбра — дороги цвета, в который не покрашена ни одна дорога, выходящая из страны (не теряя общности, будем считать, что она красного цвета).

Т.к. из города выходит ровно одна дорога красного цвета (по усл.) и она соединена с др. городом внутри страны, то граф будет ~~…~~ состоять из деревьев со степенью вершин 1:

1 — 2
3 — 4
. . . —
$k-1$ — k

, где числа — произвольные нумерация городов

Но т.к. вершин нечётное кол-во, то найдётся город из которого не выходит красная дорога (или выходит 2 красные дороги). Противоречие.

+

М-9-19		Лист 6.

2) k - чёт.

2.1) все дороги из столицы покрашены в один (зелёный) цвет.

Аналогично как в 1) для зелёных дорог, граф будет выглядеть так:

1 группа:
1 — 2
3 — 4
.....
k-4 — k-3

k-2, k-1, k — 2 группа. ~~которые~~ (города, зелёные дороги из которых ведут из столицы).

В 1-ой группе - чётное кол-во городов, а во второй - нечётное. Противоречие.

2.2) 2 дороги, выходящие из столицы покрашены в зелёный, а одна - в синий. Аналогично как в 2.1) для синих дорог:

чёт:
1 — 2
3 — 4
...
k-2 — k-1

k - нечётное.

Всего нечётное кол-во городов. Противоречие.

0б

УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

КОД
M-9-19

МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

Лист 7

№9.4 (продолжение)

$$\begin{cases} a+b \vdots 0 \text{ - усл. 1} \\ a^2+4b^2 \vdots 0 \text{ - усл 2} \end{cases}$$

$$a^2+4b^2 = a^2+(2b)^2+4ab-4ab = (a+2b)^2-4ab =$$

$$= ((a+b)+b)^2-4ab = \underbrace{(a+b)^2}_{\vdots p}+b^2+2(a+b)\cdot b-4ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2+2(a+b)\cdot b-4ab \vdots 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$b^2+2ab+2b^2-4ab \vdots 0$$

5б

всё правильно

$$3b^2-2ab \vdots 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$b(3b-2a) \vdots 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} b \vdots 0 \text{ - не подх. по Лемме 1.} \\ 3b-2a \vdots 0 \end{array}\right.$$

$$3b-2a \vdots 0 \quad | + 2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3b-2a+2(a+b) \vdots 2(a+b) \Leftrightarrow$$

$$5b \vdots p \vdots 0 \quad \text{т.к. } (a+b) \vdots 0$$

т.к. $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \vdots p \\ b \vdots p \text{ - против. Лемме 1} \end{array}\right.$

$5 \vdots p$.

т.к. p - простое:

$p = 5$.

Ответ: $p = 5$