М-11-7

1	2	3	4	5	Σ	Член жюри
7	7	7	X	0	21	
7	7	7	X	0	21	

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	X	0	
7	7	7	X	0	

№11.1

Последняя цифра получится суммой последних ~~чисел~~ цифр всех слагаемых. При умножении произведением последних цифр всех множителей.

$2021^6 = 2021\cdot2021\cdot\ldots\cdot2021 \Rightarrow$ окончится на 1 $(1\cdot1\cdot\ldots\cdot1=1)$

$2022^6 = 2022\cdot2022\cdot\ldots\cdot2022 \Rightarrow$ окончится на 2^6, т.е. на 4. $(2^6=64)$.

В степенях двойки 2^2 оканчивается на 4

2^3 – на 8

2^4 – на 6

2^5 – на 2

2^6 – на 4.

$2023^6 = 2023\cdot2023\cdot\ldots\cdot2023 \Rightarrow$ ~~окончится на~~ последние цифры будут:

$3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 9\cdot9\cdot9$, т.е.

$1\cdot9 \Rightarrow 9$ $(9\cdot9=8\underline{1};)$

$2024^6 = 2024\cdot2024\cdot2024\cdot\ldots\cdot2024$, т.е. $4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4$, т.е. $6\cdot6\cdot6$, т.е. $6\cdot6$, т.е. 6;

$2025^6 = 2025\cdot2025\cdot\ldots\cdot2025$, т.е. $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$, т.е. $5\cdot5\cdot5$, т.е. 5.

Значит последние цифры будут: $1+4+9+6+5 = 5+9+6+5$;

$0+9+6$ $(5+5=1\underline{0})$, $9+6=1\underline{5} \Rightarrow$ на 5. (другие разряды не влияют на разряд единиц)

Ответ: окончится на 5

№ 11.2 М-11-7

Пусть сыграли изначально x, победили a.

y - нужно ещё победить.

доля побед была $\frac{a}{x}$,

1) $\frac{a+1}{x+1} = \frac{a}{x} + \frac{1}{6} = \frac{6a+x}{6x}$

2) $\frac{a+3}{x+3} = \frac{6a+x}{6x} + \frac{1}{6} = \cancel{\frac{6a+2x\,x}{}} = \frac{6a+2x}{6x} = \frac{3a+x}{3x}$ (3 матча выиграли подряд)

3) $\frac{a+3+y}{x+3+y} = \frac{3a+x}{3x} + \frac{1}{6} = \frac{6a+2x+x}{6x} = \frac{6a+3x}{6x} = \frac{2a+x}{2x}$

1) $\frac{a+1}{x+1} = \frac{6a+x}{6x}$; $\cancel{6xa} + 6x = \cancel{6ax} + 6a + x^2 + x$

$x^2 - 5x + 6a = 0$

$D = 25 - 24a$, $x \cup a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 1$, $a \neq 0$, т.к. выиграла очередной матч

$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$, $x_2 = 3$.

2) $\frac{a+3}{x+3} = \frac{3a+x}{3x}$, $\frac{4}{x+3} = \frac{3+x}{3x}$; $12x = 9 + 6x + x^2$ $x^2 - 6x + 9 = 0$

$x = 3$; Значит

$a = 1$; $x = 3$. +

3) $\frac{1+3+y}{3+3+y} = \frac{2+3}{2 \cdot 3} \Rightarrow \frac{4+y}{6+y} = \frac{5}{6}$ $24 + 6y = 30 + 5y$

$y = 6$.

Ответ: нужно выиграть ещё 6 матчей подряд.

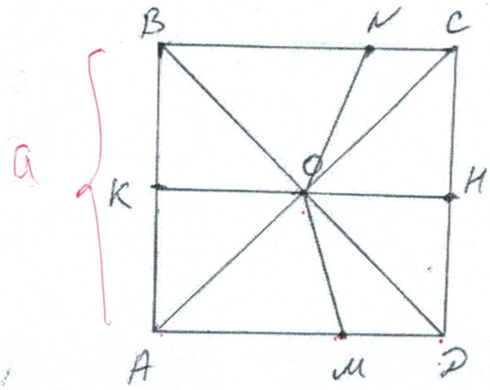
№11.3.

$ABCD$ – квадрат

$AK=KB$

$\frac{AM}{MD}$ – ?

Пусть $AB=a$



$ABCD$ – квадрат $\Rightarrow$ $BO=OD$ (диагонали пересечением делятся пополам) $AK=KB \Rightarrow$ KO – средняя линия $\triangle ABD$, т.е. $KO \parallel AD$ и $KO=0,5AD=0,5AB=0,5a$

Если $OM \parallel AB$, то $AKOM$ – параллелограмм и квадрат ($KO \parallel AM$, $AK \parallel OM$, $KA=OM=KO=AM=0,5a$) тогда $S_{AKOM}=AK \cdot AM \Rightarrow ON \parallel AB$, т.к. $S_{KBNO}=S_{AKOM}$, а если $ON \not\parallel AB$, то $KONB$ – трапеция ($KO \parallel BC$) и $S_{KONB}=\frac{1}{2}KB\cdot(KO+BN)$, тогда ~~...~~.

$\frac{1}{2}KA\cdot(KO+BN)=AK\cdot KO$ $\quad 0,5KO+\frac{BN}{2}=KO$, $BN=0,5KO\cdot 2=KO$,

но тогда $BN=KO$ и $\parallel KO \Rightarrow KBNO$ – квадрат ($KB=ON=BN=KO=0,5a$)
Но если $KOMA$ и $KONB$ – квадраты, то $MNCD$ – прямоуг., т.к. $MO \perp AD$ и $NO \perp BC$, т.е. $NO \perp AD \Rightarrow MO$ и $ON \in MN$, то $S_{MNCD}=$ $=a\cdot MD$, где $MD=AD-AM=AD-ON=0,5a \Rightarrow S_{MNCD}=0,5a^2$
а $S_{AKOM}=S_{KBNO}=0,5a\cdot 0,5a=0,25a^2$, $a\neq 0 \Rightarrow$ невозможно.
Значит $MO \not\parallel AK$ и $\Rightarrow ON \not\parallel BK$.

М-11-7

$AKOM$ и $BKON$ – трапеции $S_{MONCD} = S_{MOHD} + S_{ONCH}$, где

$H \in KO$, т.к. H – середина CD.

$S_{KOBN} = S_{KOMA} = S_{ONCH} + S_{MOHD}$

$$\frac{(OK+AM)}{2} \cdot AK = \frac{(OK+BN)}{2} \cdot AK = DH \cdot \frac{(OH+MD)}{2} + \frac{(OH+NC)}{2} \cdot DH$$

OH – средняя линия $\triangle ACD$ (аналогично KO в $\triangle ABD$) =>

$OH = OK = 0{,}5\,AD = 0{,}5a.$

$(0{,}5a + AM) = (0{,}5a + BN)$

$AM = BN$, $BC = AD$ => $MD = NC$. => $S_{MONCD} = DH \cdot (OH + MD)$.

$DH = 0{,}5a$; $0{,}5a(OH + MD) = 0{,}5a \cdot 0{,}5a + MD \cdot 0{,}5a =$

$= 0{,}25a^2 + 0{,}5a\,MD.$

$0{,}25a^2 + 0{,}5a\,MD = 0{,}5a \cdot 0{,}25a + 0{,}5a \cdot 0{,}5AM$ †

$0{,}5a^2 + a \cdot MD = 0{,}25a^2 + 0{,}5 \cdot a \cdot AM$

$0{,}5a + MD = 0{,}25a + 0{,}5AM$, $MD = a - AM$

$0{,}25a = AM - a + 0{,}5AM$

$1{,}25a = 1{,}5AM$

$AM = \frac{5}{4}a \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6}a$, тогда $MD = \frac{1}{6}a$ => $\frac{AM}{MD} = 5:1$

Ответ: $\frac{AM}{MD} = \frac{5}{3}$

м-11-7.

11.4 нет

№ 11.5.

Треугольники не имеют общих вершин => занято 15 точек (3·5), каждый по 3 точки. Будем считать точки, не являющиеся вершинами, свободными. Если на дуге окр, которую стягивает хорда находится меньше 3-х свободных точек, то эти точки использовать для построения треугольника нельзя, т.к. третья будет находиться на другой дуге, которую стягивает хорда => треугольник пересечёт эту хорду.

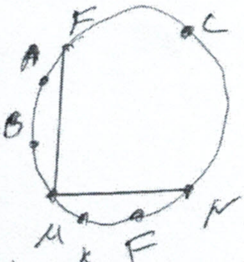


рис 1

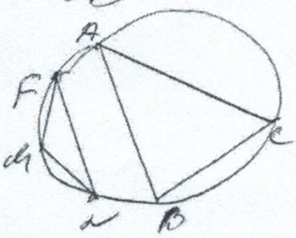
(A и B использовать нельзя) A, B ∈ ∪FM
AC и BC пересекут FK) C ∈ ∪FKM.

Т.е. для построения треугольника нужно, чтобы было минимум 3 точки лежащие на одной дуге (по одну сторону) для каждой из хорд, образующих 5 треугольников. Иначе говоря минимум 3 точки между треугольниками. наименьшими?

Неверное утверждение

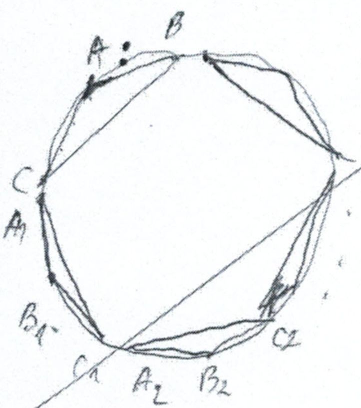
В каждом треугольнике будем рассматривать по 2 хорды (2 стороны). ~~Нет смы~~ Есть смысл рассматривать дуги, только те, на которых больше нет хорд. Например, ∪FM и ∪MK, ∪FMK нет смысла рассматривать, т.к. на ней может лежать 3 и более точек, но они будут разбиты другими хордами, как на рисунке 1. У каждого треугольника таких хорд 2. Может быть случай

рис 2.



неважно сколько точек свободных на ∪AMB, важно сколько на ∪FM, на ∪AC, BC (∪FA и ∪NB пока не рассматриваем).

Максимальное кол-во вершинок ходу 10 : М-11-7



~~Тогда свободных точек в худшем случае будет 20 (по 2 на каждой) =>~~

~~$20 + 15$ (15 вершин) $= 35$, $35 < 40$ и~~

~~$40 - 35 = 5$; Есть 5 точек не пересечённых~~

~~Остаётся 5 свободных точек, не ограниченных хордами => треугольник построить можно~~

Т.к. хорды (стороны) не пересекаются, то нам нужно узнать сколько свободных точек на дугах между отрезками.

Значит между двумя соседними точками, образующими 1 треуг. нельзя ставить больше 3-х точек (иначе можно построить треугольник. Т.е. максимум 2 точки между 2-мя вершинами => $2 \cdot 10$ $(2 \cdot 5)$ $= 20$; Значит $40 - 20 - 15$ (15 вершин) $= 5$; т.е. 5 точек находятся в пространстве между треугольниками), $5 > 3$ => можно построить треуг.

Случай

(ч.т.д.)