1	2	3	4	5	Σ
7	7	7-	0	X	
7	7	7	0	X	
7	7	7	0	X	

УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

КОД М-11-1

1	2	3	4	5	Σ	Член жюри
7	7	7	0	X	21	
7	7	7	0	X	21	

№1. Посмотрим на каждое из чисел суммы по модулю 10:

$2021^6 \equiv 1^6 (\mathrm{mod}\ 10) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 10)$; $2022^6 \equiv 2^6 (\mathrm{mod}\ 10) \equiv 8^2 (\mathrm{mod}\ 10) \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 10)$;

$2023^6 \equiv 3^6 (\mathrm{mod}\ 10) \equiv 9^3 (\mathrm{mod}\ 10) \equiv 9 (\mathrm{mod}\ 10)$; $2024^6 \equiv 4^6 (\mathrm{mod}\ 10) \equiv 16^3 (\mathrm{mod}\ 10) \equiv$
$\equiv 6^3 (\mathrm{mod}\ 10) \equiv 6 (\mathrm{mod}\ 10)$; $2025^6 \equiv 5^6 (\mathrm{mod}\ 10) \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 10)$.

Значит, числа $2021^6, 2022^6, 2023^6, 2024^6, 2025^6$ оканчиваются на 1, 4, 9, 6, 5 соответственно. Значит их сумма будет ~~оканч~~ оканчиваться на 5, $((1+4+9+6+5)(\mathrm{mod}\ 10) \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 10))$. Ответ: 5.

№2. Пусть x и y – кол-во выигранных игр и кол-во всех сыгранных игр командой соответственно. ~~Значит,~~ Тогда, в начале доля побед была равна $\frac{x}{y}$. После одной выигранной игры, доля побед стала $\frac{x+1}{y+1}$. По условию, эта величина стала на $\frac{1}{6}$ больше, ~~тое~~ то есть $\frac{x+1}{y+1} = \frac{x}{y} + \frac{1}{6}$.

После ещё двух ~~выи~~ выигранных игр, доля побед стала равна $\frac{x+3}{y+3}$, что ~~еще~~ на $\frac{1}{6}$ больше предыдущего значения, то есть $\frac{x+3}{y+3} = \frac{x+1}{y+1} + \frac{1}{6}$

~~$x+y$~~ $\frac{x+3}{y+3} = \frac{x}{y} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{x}{y} + \frac{1}{3}$. Получаем систему уравнений: $\begin{cases} \frac{x+1}{y+1} = \frac{x}{y} + \frac{1}{6} \\ \frac{x+3}{y+3} = \frac{x}{y} + \frac{1}{3} \end{cases}$

~~Пусто~~ Решим её: $\begin{cases} \frac{x+1}{y+1} - \frac{x}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{x+3}{y+3} - \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{xy+y-xy-x}{y(y+1)} = \frac{1}{6} \\ \frac{xy+3y-xy-3x}{y(y+3)} = \frac{1}{3} \end{cases}$ Заметим, что $\frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{6}$,

значит $\frac{3y-3x}{y(y+3)} = 2 \cdot \frac{y-x}{y(y+1)}$ $\frac{3(y-x)}{y(y+3)} = \frac{2(y-x)}{y(y+1)}$ $y \neq x$, т.к. иначе доля побед в обоих случаях была бы равна 1 и не увеличивалась

$\frac{3}{y+3} = \frac{2}{y+1}$ $3y+3 = 2y+6$ $y = 3$. Подставим найденное значение y в одно из уравнений: $\frac{x+1}{3+1} = \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$ $\frac{x+1}{4} = \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$ $\frac{x+1}{4} - \frac{x}{3} = \frac{1}{6}$ $\frac{3x+3-4x}{12} = \frac{1}{6}$

$3x+3-4x = 2$ $x = 1$.

Пусть теперь ~~сыграно~~ выиграно ещё K игр, и доля побед увеличилась ещё на $\frac{1}{6}$, тогда $\frac{x+3+K}{y+3+K} = \frac{x}{y} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Зная значения x и y, найдем значение K:

$\frac{1+3+K}{3+3+K} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ $\frac{4+K}{6+K} = \frac{5}{6}$ $24+6K = 30+5K$ $K = 6$.

Найденное значение K и является ответом на задачу.

Ответ: 6.

УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

КОД
M-11-1

МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

Запишем уравнение для точки пересечения одной из этих прямых и ~~у~~ прямой $y=20-x$: $20-x=kx+b$. $k=tg(9^\circ\cdot\alpha)$, $b=19(1-tg(9^\circ\cdot\alpha))\Rightarrow$
$\Rightarrow 20-x=tg(9^\circ\cdot\alpha)\cdot x+19(1-tg(9^\circ\cdot\alpha))$ $\quad 20-19(1-tg(9^\circ\cdot\alpha))=x(1+tg(9^\circ\cdot\alpha))$

~~1-tg~~ $x=\dfrac{1+19\,tg(9^\circ\cdot\alpha)}{1+tg(9^\circ\cdot\alpha)}$. Для всех прямых $9^\circ\cdot\alpha$ ~~принадле~~ лежит в пределах от 0° до 180° (не включая правую границу, т.к. прямые с ~~углом на~~ углами наклона 0° и 180° являются одной прямой).

$180^\circ > 9^\circ\cdot\alpha \geq 0^\circ$, $\alpha\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $20>\alpha\geq 0$, $\alpha\in\mathbb{Z}$. Т.к. при угле наклона ~~1~~ 135° ~~пере~~ точки пересечения нет, то $9^\circ\cdot\alpha\neq 135^\circ \Rightarrow \alpha\neq 15$.

Тангенс угла 90° не определен, поэтому $9^\circ\cdot\alpha\neq 90^\circ\Rightarrow\alpha\neq 10$. Но так как при угле наклона 90° будет точка ~~пересечен~~ пересечения с абсциссой равной 19 (т.к. прямая, паралл. Oy и проходящая через $(19;19)$ пересекает Ox в т. ~~(0,~~ $(19;0)$), просто добавим её к итоговой сумме.

Итого, сумма всех значений абсцисс точек пересечения $y=20-x$ и данных в условии прямых будет равна:

$19+\sum\limits_{\alpha}\dfrac{1+19\,tg(9^\circ\cdot\alpha)}{1+tg(9^\circ\cdot\alpha)}$, где ~~$\alpha\in\mathbb{Z}\cap[0,19)$~~ α – целое число в диапозоне от 0 до 19, не равное 10 и 15.

Ответ: $19+\sum\limits_{\alpha}\dfrac{1+19\,tg(9^\circ\cdot\alpha)}{1+tg(9^\circ\cdot\alpha)}$, $\alpha\in\mathbb{Z}\cap[0;20)$, $\alpha\neq 10$, $\alpha\neq 15$.

нет существенных продвижений (симметрии, суммы = 20)

Вычисл. данной суммы равносильно исходной задаче.

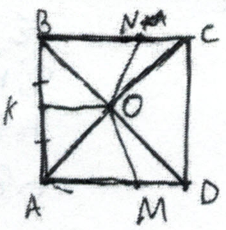
УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

КОД

М-11-1

**МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»**

№3.



Пусть $S_{ABCD}=S$, тогда $S_{ABO}=S_{BCO}=S_{COD}=S_{AOD}=\frac{S}{4}$ ✓ (т.к. AC и BD – диагонали квадрата).
OK – медиана в $\triangle ABO$ (т.к. т. K – середина AB) =>
=> $S_{OBK}=S_{OKA}=\frac{S}{8}$ +

$\frac{S_{\triangle BNO}}{S_{\triangle BCO}}=\frac{BN}{BC}$ (т.к. т. $N\in BC$) => $S_{\triangle BNO}=\frac{BN}{BC}\cdot\frac{S}{4}$; $\frac{S_{\triangle ONC}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{NC}{BC}$ => $S_{\triangle ONC}=\frac{NC}{BC}\cdot\frac{S}{4}$.

$\frac{S_{\triangle AOM}}{S_{\triangle AOD}}=\frac{AM}{AD}$ (т.к. т. $M\in AD$) => $S_{\triangle AOM}=\frac{AM}{AD}\cdot\frac{S}{4}$; $\frac{S_{\triangle MOD}}{S_{\triangle AOD}}=\frac{MD}{AD}$ => $S_{\triangle MOD}=\frac{MD}{AD}\cdot\frac{S}{4}$.

~~$S_{\triangle COD}=\frac{S}{4}$~~. $S_{KONB}=S_{KOMA}=S_{ONCDM}$ (по условию). $S_{KONB}=S_{OBK}+S_{ONB}=\frac{S}{8}+\frac{BN}{BC}\cdot\frac{S}{4}$.

$S_{KOMA}=S_{KOA}+S_{AOM}=\frac{S}{8}+\frac{AM}{AD}\cdot\frac{S}{4}$; $S_{ONCDM}=S_{ONC}+S_{COD}+S_{ODM}=\frac{NC}{BC}\cdot\frac{S}{4}+\frac{S}{4}+\frac{MD}{AD}\cdot\frac{S}{4}$.

$S_{KONB}=S_{KOMA}$ => $\frac{S}{8}+\frac{BN}{BC}\cdot\frac{S}{4}=\frac{S}{8}+\frac{AM}{AD}\cdot\frac{S}{4}$ => $\frac{BN}{BC}=\frac{AM}{AD}$ BC=AD (т.к. ABCD – квадрат) =>
=> BN=AM ~~=NC=BC~~ ~~BN=MD=~~ ~~=CAD=AM~~.

$NC=BC-BN$; $MD=AD-AM$; $BC=AD$; $BN=AM$ => $NC=MD$. => $\frac{NC}{BC}=\frac{MD}{AD}$

$S_{KOMA}=S_{ONCDM}$ => $\frac{S}{8}+\frac{AM}{AD}\cdot\frac{S}{4}=\frac{S}{4}+\frac{S}{4}\left(\frac{NC}{BC}+\frac{MD}{AD}\right)$; $\frac{S}{8}+\frac{AM}{AD}\cdot\frac{S}{4}=\frac{S}{4}+\frac{S}{4}\cdot 2\frac{MD}{AD}$

$\frac{S}{8}+\frac{S}{4}\cdot\frac{AM}{AD}+\frac{S}{4}\cdot\frac{MD}{AD}=\frac{S}{4}+\frac{S}{4}\cdot 2\frac{MD}{AD}+\frac{S}{4}\cdot\frac{MD}{AD}$; $\frac{S}{8}+\frac{S}{4}\left(\frac{AM+MD}{AD}\right)=\frac{S}{4}+\frac{S}{4}\cdot 3\frac{MD}{AD}$

$\frac{S}{8}+\frac{S}{4}\cdot\frac{AD}{AD}=\frac{S}{4}+\frac{3S}{4}\cdot\frac{MD}{AD}$ $\frac{S}{8}+\frac{S}{4}=\frac{S}{4}+\frac{3S}{4}\cdot\frac{MD}{AD}$ $\frac{1}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{MD}{AD}$

$\frac{MD}{AD}=\frac{1}{6}$; $AM=AD-MD=AD-\frac{1}{6}AD=\frac{5}{6}AD$ => $\frac{AM}{MD}=\frac{\frac{5}{6}AD}{\frac{1}{6}AD}=\frac{5}{1}$. Ответ: 5:1.

№4. ~~Пр~~ По условию, ~~одна из провед~~ через (19; 19) провели ~~прямую~~ прямые, параллельные осям координат. Рассмотрим прямую, параллельную оси Ox. Все прямые будут составлять с ней ~~угол~~ угол, ~~равный~~ кратный 9° (т.к. угол между любыми двумя соседними прямыми равен 9°). Значит все прямые будут составлять с осью Ox угол, ~~равный~~ кратный 9°. + Значит, угловой коэффициент каждой из этих прямых будет равен $tg(9°\cdot k)$, где k – целое число. Тогда уравнение для таких прямых – это $tg(9°\cdot k)\cdot x+b$. ~~Т~~ Так как все эти прямые проходят через точку (19; 19), то для каждой из них справедливо равенство $tg(9°\cdot k)\cdot 19+b=19$ => $b=19(1-tg(9°\cdot k))$.

Все из этих прямых, кроме той, чей угол ~~наклона~~ с осью Ox составляет 135°, пересекают прямую $y=20-x$. ~~в одной точке~~ (прямая с углом ~~накло~~ наклона 135° не пересекает $y=20-x$ т.к. параллельна ей (т.к. угол наклона $y=20-x$ равен 135°)). +