1	2	3	4	5	Σ
7 сор	7 мд	0 мд	3 мд	4 мд	~~17~~ 24
7 мгу	7 сор	0 мгу	3 мгу	4 мгу	

КОД | М1 | - | 1 | 1 | - | 4 |

7 мгу

Лист 1 из 3

ЗАДАЧА № 11.3 Начало

Сразу заметим, что допустимы два разных трактования условия задачи, поскольку неясно, какой разряд (цифру) в натуральном числе считать „предыдущим", а какой „последующим". Во избежание досадной ошибки при прочтении условия я предлагаю рассмотреть оба возможных случая: больше цифра более старшего разряда или больше цифра более младшего разряда.

Рассмотрим сначала случай, когда за „первую цифру" авторы задачи брали самый младший разряд числа (разряд единиц). Тогда цифры в натуральном числе должны возрастать с левого до правого конца числа (как в числе 1358, например). Давайте предположим, что такое число делится нацело на 111. Тогда существует некий натуральный множитель, который при умножении на 111 даёт в произведении число, данное нам по условию. Очевидно, что этот множитель не может быть меньше 10 (цифры при умножении на 111 дают числа, состоящие из трёх одинаковых цифр). Рассмотрим, может ли он быть двузначным. Пусть этот множитель — некоторое число $\overline{ab}$. Запишем его умножение на число 111 в столбик.

$$
\begin{array}{r}
\times\ \overline{ab} \\
111 \\
\hline
ab \\
+\ ab \\
+\ ab \\
\hline
p\,b
\end{array}
$$

(черта над числом, обозначающая, что a и b — цифры одного числа, будет нами опущена для удобства записи, но мы решаем, приняв a и b чем-то вроде букв в ~~буквах~~ числовом ребусе)

Итак, последней цифрой произведения, очевидно, будет b. При сложении a и b получается некоторое p. Заметим, что p должно быть меньше b, что возможно, лишь если на самом деле p — не сумма a и b, а её разряд единиц. Действительно, если $a+b < 10$, то, т.к. $a \in N$, это число, очевидно, больше b. Значит, $a+b \geq 10$, а мы запоминаем единицу для следующего сложения. Следующее сложение представляет собой вновь $a+b$, а т.к. мы запомнили единицу, то и вовсе $a+b+1$. Число, которое нужно записать, могло бы оказаться больше p лишь в том случае, если $a+b+1 \geq 20$ (рассуждение строится на том, что $p+1 > p$, то есть снова должен быть переход в следующий разряд, как выше), однако это невозможно, т.к. цифры a и b в сумме не дадут 19 и больше ($a \leq 9$, $b \leq 9$, $a+b \leq 18$). Следовательно, цифра, записанная после этого сложения, окажется больше p. Это противоречие.

Итак, искомый множитель не может быть ~~однозн~~ однозначным или двузначным.

Давайте докажем по индукции, что и n-значным он быть не может.

Оценочные баллы: максимальный – **7 баллов**; фактический __________ **баллов.**

Подписи членов жюри ______________________________

УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

КОД

М	-	1	1	-	4	

**МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»**

Лист 1 из 3

ЗАДАЧА № 11.3 Продолжение

У нас уже есть база индукции, мы только что доказали, что при $n = 2$ такой множитель существовать не будет. Теперь требуется доказать шаг индукции. Предположим, что при $n = k$ такого множителя нет, то есть где-то при умножении k-значного числа в общем виде на 111 в произведении одна (минимум) цифра оказалась больше либо равна записанной ранее.

Примечание! Будем для удобства считать, что до этой цифры такого не происходило, условие соблюдалось.

Теперь проверим ~~предположение индукции~~ для $n = k+1$, приписав к множителю слева один разряд (некоторая ~~новая~~ цифра m). Итак, запишем знакомый столбик:

$$\begin{array}{r} \times\ \overline{mabc\ldots} \\ 111 \\ \hline m\,a\,b\,c\ldots \\ m\,a\,b\,c\ldots \\ m\,a\,b\,c\ldots \\ \hline d\ i\ j \end{array}$$

⓪

ⓘ – результат, который записывался в этом столбике цифр при умножении k-значного числа. d – тоже.

* мы считаем разряд, обозначенный ⓪ последним, на основании того, что $m \le 7$, т.к. цифр в числе не менее трёх, а она – меньшая, а ещё добавиться к ней может не более 2, сумма 10 не достигнет.

** i – цифра, d – тоже.

Напомним, что для множителя $\overline{abc\ldots}$ умножение где-то противоречит условию по предположению индукции.

Заметим, что если это противоречие (записанная в произведении цифра вдруг оказалась больше ~~записанной~~ цифры, записанной ранее" – в дальнейшем будем говорить „умножение ломается") вдруг оказалось до пунктирной линии, то появление нового разряда ничего не меняет, поскольку там сложение будет происходить аналогично k-значному числу. Если умножение „ломается" до пунктирной линии в k-значном числе, то мы можем принять без доказательства, что оно сломается и в $(k+1)$-значном числе. Если же оно не ломается до пунктирной линии, то обязано сломаться ~~до~~ внутри*, так как k-значное число ~~сзади~~ после второй ~~же~~ такой „заканчивается" (не участвует в сложении далее). Между волнистыми линиями всего 3 столбика цифр. Докажем, что если умножение k-значного числа ломалось в подчёркнутых столбиках, то сломается в них и теперь. При умножении k-значного числа $i \ge j$, чтобы это изменить, прибавив $m \in N$, должен накопиться разряд. Для этого сначала нужно прибавить $10 - i$ (до нуля в сумме, т.е. его записи), а затем ещё $m + 2$, т.к. ~~все~~ все последняя записанная цифра $\ge m$*, а ~~предыдущие~~ записанные ранее должны быть больше хотя бы на 1, т.е. на месте i не менее $m+2$. Отсюда нужно прибавить $m = 10 - i + m + 2$, $i = 12$, $\Rightarrow$ противоречие**

Противоречие найдено, $\Rightarrow$ если в подчёркнутых умножение ломалось, то этого не изменить.

Оценочные баллы: максимальный – **7 баллов**; фактический ____________ **баллов.**

Подписи членов жюри ________________________________

УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

**МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»**

КОД

М	-	1	1	-	4	

ЗАДАЧА № 11.3 Продолжение

Сразу заметим, что если умножение ломалось в „$\overset{m}{e}$ $\overset{m}{b}$“-столбиках, то оно там сломается и теперь, так как можно расписать для d рассуждения, аналогичные рассуждениям для i: $m = 10 - d + m + 2$, $\Rightarrow d = 12$, противоречие (чтобы „поменять“ $i < d$ надо пакинуть разряд).

Таким образом, мы доказали, что, если умножение ломалось для k-значного числа, сломается оно и для $(k+1)$-значного, $\Rightarrow$ искомого множителя не существует.

Теперь рассмотрим случай, когда „первая цифра“ — старший разряд. Аналогично рассуждениям в первом случае понимаем, что должен быть множитель, для которого выполнится условие. Запишем в столбик умножение:

$$
\begin{array}{r}
\times\ \overline{abc\ldots de} \\
111 \\
\hline
abc\ldots de \\
+\ abc\ldots de \\
abc\ldots de \\
\hline
a\ z\ \ \ q\,p\,e
\end{array}
$$

, где $\overline{abc\ldots de}$ — наш множитель.

Заметим, что $p > e$, то есть разряд пакидываться не должен ($e + d < 10 + e$, то есть при пакидывании разряда записанная цифра уменьшится), $\Rightarrow$

$e < 10$, $d + e = p < 10$, по аналогичным рассуждениям $c + d + e = q < 10$ и т.д. ~~[illegible]~~

В какой-то момент придём к тому, что $a + b + c < 10$, т.е. $z = a + b + c$ и записано именно z (десяток не пакидывается), но это противоречие, так как $z = a + b + c$, $b, c \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow z > a$, а по логике „десяток нельзя пакидывать“ и из того, что $a + b + c < 10$, $\Rightarrow a + b < 10$, первой цифрой должно стать именно a, $\Rightarrow$ противоречие.

Итак, множителя, который даст при умножении на 111 искомое число, не найдётся, $\Rightarrow$ это число не может делиться на 111.

Ответ: нет, не может.

~~4900~~
~~490~~
~~49~~
~~439~~
~~4+3~~
~~9+4 ≠ 10~~

Оценочные баллы: максимальный – **7 баллов**; фактический ___________ **баллов.**

Подписи членов жюри ____

КОД | М | - | 1 | 1 | - | 4 |

ЗАДАЧА № 11.2

Произведение корней трёхчлена можно найти по формуле Виета, так как мы знаем, что коэффициенты целые, или через дискриминант, значение получается равным

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=abc$$

$$\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=abc$$

$$\frac{c}{a}=abc \quad (\text{по т. Виета } x_1\cdot x_2=\frac{c}{a})$$

Т.к. $a,b,c\in\mathbb{Z}$ и $a,b,c\neq 0$, $\Rightarrow$ на них можно делить или домножать

$$\frac{c}{a}=abc \quad \Big|:c$$

$$\frac{1}{a}=ab \quad \Big|\cdot a$$

$1=a^2b$, т.к. $a^2\geq 1$ $(a\in\mathbb{Z}, a\neq 0)$, а $b\in\mathbb{Z}$, то $\underline{b=1,\ a^2=1}$

Так как $b=1$, $a=\pm 1$, то abc может принимать значения c и $(-c)$.

Дополнительно скажем, что оба эти значения (c или $(-c)$) будут отрицательны, т.к. c будет при $a=1$, а $(-c)$ при $a=(-1)$, т.к. a и c — разных знаков из $D\geq 0$, $b^2-4ac\geq 0$

$1\geq 4ac$, где $a,c\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 4ac<0$, т.е. разные знаки.

Ответ: произведение может принимать значения $\underline{c}$ (при $a=1$) ($c<0$) или $\underline{(-c)}$ (при $a=-1$, $c>0$)

Оценочные баллы: максимальный – **7 баллов**; фактический __________ **баллов.**

Подписи членов жюри ______________________________

КОД | М | - | 1 | 1 | - | 4 |

ЗАДАЧА № 11.1

Лист 3 из 3

$(x^2+y^2)^2-1-4x^2y^2 = x^4+y^4+2x^2y^2-4x^2y^2-1 =$
$= x^4+y^4-2x^2y^2-1 = (x^2-y^2)^2-1 =$
$= (x^2-y^2+1)(x^2-y^2-1)$

7б

Оценочные баллы: максимальный – **7 баллов**; фактический ________ **баллов.**

Подписи членов жюри ________________________________

КОД

М	–	1	1	–	4	

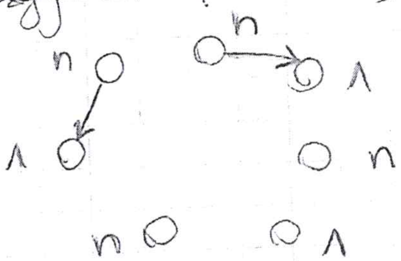
**МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»**

ЗАДАЧА № 11.4

Заметим сразу, что два лгуна за завтраком не могли сидеть вместе, так как у них разный возраст и получилось бы, что у одного из них есть сосед-лгун моложе него самого. Тогда ответ „да" стал бы для него правдой, а лгуны правду говорить не могут. Противоречие. +

При этом у каждого правдивого гнома должен быть хотя бы один сосед-лгун моложе него. Тогда относительно правдивости-лживости гномов за завтраком они могли сидеть единственным (с точностью до пересадки лгунов ~~и правдивых~~ между собой (лгун с лгуном ~~и наоборот~~); или правдивых между собой (аналогично) или поворота) образом.

(всего лгунов трое, так как при 1-2 некоторые правдивые гномы оказались бы между правдивыми и совравшими, а при 4-7 какие-то 2 лгуна оказались бы рядом, а так нельзя)



На данном рисунке стрелочками показано, кто из гномов точно младше (в сторону молодого)

За ужином сразу понятно, что какие-то два правдивых гнома сядут рядом, т.к. их четверо из семи, ⇒ один из них точно моложе, он скажет „да" на вопрос 100%.

1 „да"

Оценочные баллы: максимальный – **7 баллов**; фактический ____________ **баллов.**

Подписи членов жюри ________________________________