1	2	3	4	5	Σ
7	2	7	7 нд	0 нд	23
7	2	7	7	0	

КОД M-11-2

УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

№1. $(x^2+y^2)^2 - 1 - 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 1 - 4x^2y^2 =$
$= x^4 + y^4 - 2x^2y^2 - 1 = ((x^2)^2 - 2x^2\cdot y^2 + (y^2)^2) - 1 = (x^2-y^2)^2 - 1 =$
$= (x^2 - y^2 - 1)(x^2 - y^2 + 1) = ((x-y)(x+y) - 1)((x-y)(x+y)+1)$

Ответ: $((x-y)(x+y)-1)((x-y)(x+y)+1)$

№2.

Пусть x_1 и x_2 – корни многочлена ax^2+bx+c.
По условию известно, что $x_1\cdot x_2 = a\cdot b\cdot c$. Воспользуемся теоремой Виета, тогда $x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то есть:

$a\cdot b\cdot c = x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$a\cdot b\cdot \cancel{c} = \frac{\cancel{c}}{a}$

$a^2\cdot b = 1$ – 1б

$b = \frac{1}{a^2}$, но по условию a, b и c – целые, значит a^2 должно быть делителем 1, тогда имеем два решения: $(a=1;\ b=1)$ и $(a=-1;\ b=1)$

Следовательно $x_1\cdot x_2$ может принимать значения $1\cdot 1\cdot c = c$ или $(-1)\cdot 1\cdot c = -c$

В случае $a=1$, многочлен имеет вид $x^2+x+c=0$. +

$D = 1-4c$, заметим, что дискриминант должен быть строго больше 0, значит $1-4c>0$; $1>4c$; $c<\frac{1}{4}$; +
значит c может принимать только отрицательные целые значения

Ошибка в рассуждениях

КОД М − 11 − 2

$-x^2+x+c$

$1+4c>0$

В случае $a=-1$ получим что $c>\frac{1}{4}$, знаит принимает $c>-1/4$ только положительные целые значения. В обоих случаях произведение принимает значение $x_1 \cdot x_2 = -|c|$

Ответ: произведение принимаея значение $x_1 \cdot x_2 = -|c|$ (то есть всего два возможных значения: c и $-c$)

Ответом должно быть мн-во чисел. Не указано, какие значения принимает c.

№3. Предположим, что нашлось такое число $a_1a_2\ldots a_n$, $n\leq 10$, которое делится на 111 и $a_i < a_{i-1}$, для каждого $i\in[2;n]$

Заметим, что если отнять от числа $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ число вида $\underbrace{111\ldots1}_{3k}$, где $n-3<3k\leq n$, то есть число из единиц, максимально возможной длины кратной 3, то мы отнимем число $(111\cdot10^{3k-3}+111\cdot10^{3k-6}+\ldots+111)$ то есть число, кратное 111, а знаит разность $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ и $\underbrace{11\ldots1}_{3k}$ тоже будет кратна 111. При этом мы отнимаем у k правых знаков числа по 1, а следовательно неравенства $a_i < a_{i-1}$, для $i\in[2;n]$ сохраняется. Отнимем такое число $\underbrace{11\ldots1}_{3k}$ a_n-ое количество раз. Тогда у нас останется число $\overline{a_{1\ldots}(a_i-a_n)\ldots(a_{n-1}-a_n)(a_n-a_n)}$, то есть число, оканчивающееся на 0, а знаит делящееся на 10. Так как 10 и 111 взаимнопростые, то при делении на 10, кратность 111 не потеряется, а так как деление на 10 не затрагивает разряды старше единицы, то и условие, что каждая последующая цифра меньше предыдущей сохраняется. Разделим на 10 и получим число $\overline{a_1\ldots(a_i-a_n)\ldots(a_{n-1}-a_n)}$

Новое число всё так же делится на 111 и удовлетворяет условию $a_i < a_{i-1}$ для $i \in [2; n-1]$.

Повторим все операции (отнимание числа вида $\underbrace{11..1}_{k1}$ $(a_{n-1} - a_n)$ количество раз) и сможем опять делить на 10.

После $n-3$ таких проходов останется число вида $\overline{b_1 b_2 b_3}$, где $b_1 > b_2 > b_3$, при этом $\overline{b_1 b_2 b_3} \vdots 111$. Не сложно заметить, что такое невозможно, так как все трехзначные числа кратные 111 имеют вид $(\overline{ccc})$, то есть $b_1 = b_2 = b_3$, что противоречит полученному. Получили противоречие, следовательно предположение неверно, а значит такое число не может делиться на 111.

Ответ: нет, не может.

№11.4.

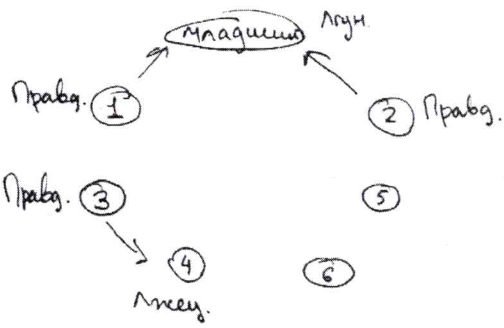
Рассмотрим гномов во время завтрака. Посмотрим на самого младшего. Он, как и все остальные, ответил "Да", а значит самый младший – лгун, так как у него не могло оказаться соседа моложе, чем он. Сразу заметим, что и на вечерний вопрос младший ответит "Да", так как соседа моложе его оказаться не могло, а гномик лжец.

Теперь посмотрим на соседей самого младшего гномика (во время завтрака)

(стрелки идут от более взрослых к более младшим)

Предположим, что сосед (например 1) лжец. Тогда у него действительно есть сосед-лгун младше его, то есть ответ "Да" будет правдой, что противоречит натуре этого гнома. А значит оба соседа младшего гномика во время завтрака оказались правдивыми.

Перейдем к соседям гномов 1 и 2. Пусть сосед 1-ого оказался правдивым (случай, когда он оказался лгуном рассмотрим позже)



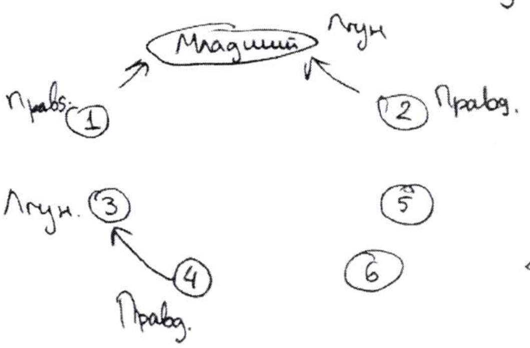
Тогда сосед третьего (отличный от 1) должен быть лжецом (иначе 3 не ответил бы "Да")

а) Если сосед 2-ого (номер 5) оказался тоже правдив, то анологично рассуждениям выше, шестой окажется лгун. Тогда кто-то из пары 4 и 6 ответом "Да" скажет правду (кто-то из двух лжецов младше, одинаковых возрастов нет). Значит 5 не может быть правдив, если 3 правдив.

б) 5 – лгун. Значит у него нет соседей-лгунов младше его.
б).1) Если 6 – лжец, то он старше 5. Но в паре 4 и 6 оба лгут, а значит кто-то не мог сказать "Да"
б).2). 6 – правдивец. Либо 4 либо 5 младше его, противоречий нет.

Значит, если 3 оказался правдив, то всего за столом 3 лгуна и 4 правдивых гнома.

Обещаный второй случай: 3 оказался лжецом.



а) Если 4 тоже лжец, то кто-то из пары 3 и 4 не мог ответить "Да".

б) 4 – правдивый. 3 младше 4
б.1) 5 – правдив, тогда 6 лжец, противоречий нет. За столом 3 лгуна, 4 правдивых.

б.2) 5 – лжец. Тогда 6 не мог оказаться лжецом, иначе кто-то бы не сказал "Да". За столом 3 лжеца, 4 правдивых.

Получается, что при любой возможной рассадке гномов за столом, 3-ое из них должны быть лжецами, а 4-ро правдивыми гномами.

К ужину за столом собрались всё те же 3 лгуна и 4 правдивых гнома. Мы уже знаем (с листа номер 3), что самый младший из гномов ответит "Да". Надо доказать, что кто-то ещё ответит "Да".

Очевидно, что при рассадке 7-ми гномов по кругу, какие-то два правдивых окажутся рядом (хотя бы два правдивых, может быть и больше). Если это не так, то рядом с каждым рыцарем два лжеца, а так как правдивых 4, то лжецов оказалось бы не менее $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$ ($\cdot 2$ так как у правдивого 2 соседа;

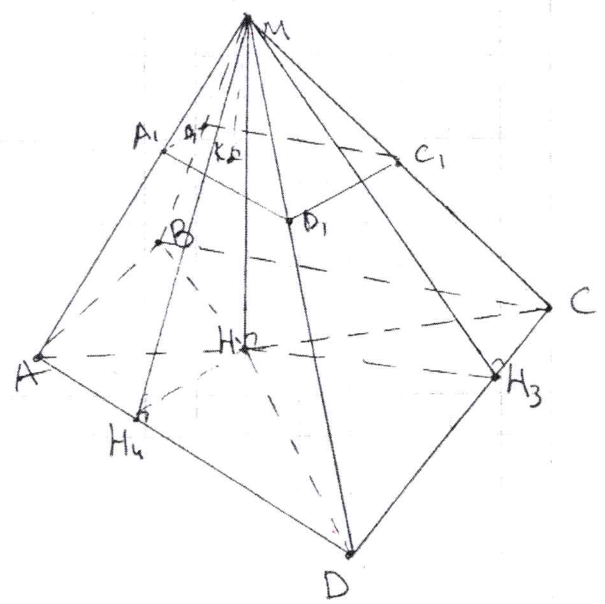
$:2$, так как один лжец не более, чем у 2-х рыцарей). Но мы имеем 3 лгунов, значит два правдивых стоят рядом. А тогда кто-то из них должен ответить "Да" на второй вопрос Белоснежки, так как кто-то из них будет младше второго.

Знаит будет хотя бы 2 ответа "Да": один от самого младшего гнома (лжеца) и один от какого-то правдивого гнома.

№11.5

Дано:
ABCD - основание
M - вершина
$S_{ABM} = S_{BCM} = S_{CDM} = S_{ADM}$
$S_{A_1B_1M} = S_{B_1C_1M} = S_{C_1D_1M} = S_{A_1D_1M}$

Док-ть:
$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$



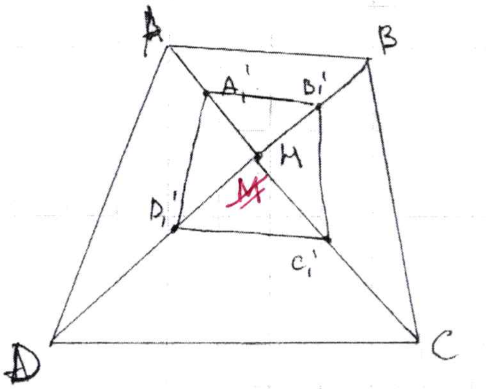
MH - высота всей пирамиды. MH_3 и MH_4 - высоты треугольников $\triangle CMD$ и $\triangle DMA$ соответственно.

$\angle MHH_3 = \angle MHH_4 = 90°$, тогда по теор. Пифагора $HH_3 = \sqrt{MH_3^2 - MH^2}$ и $HH_4 = \sqrt{MH_4^2 - MH^2}$

$S_{MCD} = S_{\triangle MDA} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot MH_3 \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot MH_4 \cdot AD \Rightarrow MH_3 \cdot DC = MH_4 \cdot AD$

$HH_3 \cdot DC = \sqrt{(MH_3 \cdot DC)^2 - MH^2 \cdot DC^2}$; $HH_4 \cdot AD = \sqrt{(MH_3 \cdot AD)^2 - MH^2 \cdot AD^2}$

$S_{AHD} = S_{DHC}$ и аналогично $S_{AHD} = S_{DHC} = S_{ABH} = S_{BHC}$



A_1'; B_1'; C_1'; D_1' – проекции точек A_1, B_1, C_1, D_1 на (ABCD).

Так как $S_{ABM} = S_{BMC}$; $S_{A_1B_1M} = S_{B_1MC_1}$, то $S_{AA_1B_1B} = S_{BB_1C_1C}$,

неверно!

а значит $S_{AA_1'B_1'B} = S_{BB_1'C_1'C}$, тогда $S_{\Delta A_1'B_1'H} = S_{\Delta B_1'HC_1'}$ (аналогично для других)

Предположим, что $(A_1B_1C_1D_1)$ не параллельна (ABCD), тогда вершина M спроектируется в какую-то точку K, не лежащую на прямой MH. Будет справедливо $S_{A_1KB_1} = S_{B_1KC_1} = S_{C_1KD_1} = S_{A_1KD_1}$. Если мы построим проекцию точки K на (ABCD), то K' должна совпасть с H, значит плоскости были параллельны.