1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	3	7	31

УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

КОД

М	-	1	1	-	5	

МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

ЗАДАЧА № 11.1

$(x^2+y^2)^2-1-4x^2y^2 = x^4+y^4+2x^2y^2-1-4x^2y^2 = x^4+y^4-2x^2y^2-1 =$

$= (x^2-y^2)^2-1 = \underline{(x^2-y^2-1)(x^2-y^2+1)}$ 7б

Оценочные баллы: максимальный – **7 баллов**; фактический ________ **баллов.**

Подписи членов жюри ____________________

КОД | М | - | 1 | 1 | - | 5 | |

Лист 2 из 6

ЗАДАЧА № 11.2

ax^2+bx+c

x_1, x_2 - корни $\Rightarrow$ по теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = x_1 \cdot x_2$, $a \cdot b \cdot c = \frac{c}{a} \Rightarrow a \cdot b = \frac{1}{a}$

$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow ab \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$, но при $|a| \neq 1$ $\frac{1}{a} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1. $a = 1 \Rightarrow 1 \cdot b = \frac{1}{1}$

$b = 1$

$a \cdot b \cdot c = c$

$D = b^2 - 4ac > 0$

$1 - 4c > 0$

$\left.\begin{matrix} \frac{1}{4} > c \\ c \in \mathbb{Z} \\ c \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \leq -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c \leq -1$

$\cancel{a \cdot b = c}$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b \cdot c \in \mathbb{Z}$

2. $a = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1) \cdot b = \left(-\frac{1}{1}\right)$

$-b = -1 \Rightarrow b = 1$

$a \cdot b \cdot c = (-1) \cdot 1 \cdot c = -c$

$D = b^2 - 4ac > 0$

$1 + 4c > 0$

$\frac{1}{4} + c > 0$

$\left.\begin{matrix} c > -\frac{1}{4} \\ c \in \mathbb{Z} \\ c \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \geq 1 \Rightarrow -c \leq -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c \leq -1$

$a \cdot b \cdot c \in \mathbb{Z}$

Ответ: произведение всех коэффициентов может принимать все возможные целые значения в промежутке $(-\infty; -1]$

Оценочные баллы: максимальный – **7 баллов;** фактический ___________ **баллов.**

Подписи членов жюри ______________________________

УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

КОД

М	-	1	1	-	5	

МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

ЗАДАЧА № 11.3

Представим такое натуральное число как $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$, где $a_1, a_2 \ldots a_n$ – цифры числа => $a_1 > a_2 \ldots > a_n$. Предположим, что такое число делится на 111. Тогда заметим, что кол-во цифр ≥4, т.к. двузначные и однозначные числа не могут быть кратны трехзначному, а все трехзначные числа, кратные 111 имеют все одинаковые цифры (это такие числа: {111; 222; 333; 444; 555; 666; 777; 888; 999}).

Вычтем из этого числа $a_n \cdot 111 = \overline{a_na_na_n}$

$$\begin{array}{r} -\overline{a_1a_2\ldots a_n} \\ \underline{a_na_na_2} \\ \overline{a_1a_2\ldots(a_{n-2}-a_n)(a_{n-1}-a_n)0} \end{array}$$

т.к. $a_{n-2} > a_{n-1} > a_n$ => $a_{n-2}-a_n > a_{n-1}-a_n > 0$

Представим получившееся число как $\overline{a_1a_2\ldots(a_{n-2}-a_n)(a_{n-1}-a_n)} \cdot 10$

Так как исходное число и $a_n \cdot 111$ были кратны 111, то и результат их разность кратен 111, а т.к. $10 \not\vdots\, 111$, то

$\overline{a_1a_2\ldots(a_{n-2}-a_n)(a_{n-1}-a_n)} \vdots\, 111$. Если $a_1 > a_2 \ldots > a_{n-2} > a_{n-1}$, то $a_1 > a_2 \ldots > a_{n-2}-a_n > a_{n-1}-a_n$ =>

=> получившееся число обладает теми же свойствами, что и исходное (кратно 111 и каждая последующая цифра меньше предыдущей). Назовем такую операцию вычитания и деления на 10, в результате которой получившееся число обладает свойствами исходного, но на разряд меньше, действием α. Тогда после определенного числа действий α мы получим трехзначное число $\overline{a_1b_2b_3} \vdots\, 111$, у которого $a_1 > b_2 > b_3$. Но в самом начале мы указали, что у трехзначного числа, кратного 111, все цифры равны. Однако т.к. $a_1 > b_2 > b_3$, то $a_1 \neq b_2 \neq b_3$ => получаем противоречие => исходное число не могло быть кратно 111.

Ответ: нет, не может

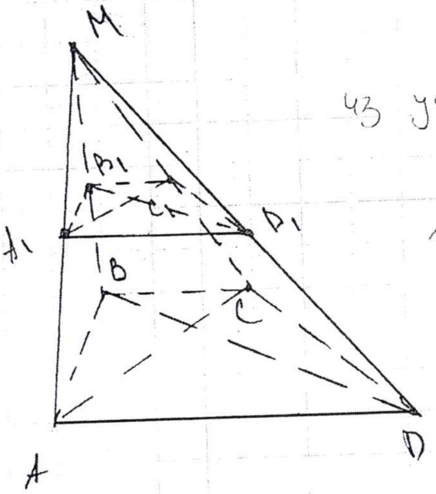
Оценочные баллы: максимальный – **7 баллов**; фактический ______ **баллов.**

Подписи членов жюри ______

КОД | М | - | 1 | 1 | - | 5 |

Лист 4 из 6

ЗАДАЧА № 11.5



Решение:

из условия: $S_{ABM}=S_{MBC} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot AM\cdot \cancel{MB}\cdot \sin\angle AMB = \frac{1}{2}\cdot \cancel{MB}\cdot MC\cdot \sin\angle BMC$

$AM\cdot \sin\angle AMB = MC\cdot \sin\angle BMC$

$\frac{AM}{MC}=\frac{\sin\angle BMC}{\sin\angle AMB}$

$S_{MBC}=S_{MCD} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot MB\cdot \cancel{MC}\cdot \sin\angle BMC = \frac{1}{2}\cdot \cancel{MC}\cdot MD\cdot \sin\angle CMD$

$MB\cdot \sin\angle BMC = MD\cdot \sin\angle CMD$

$\frac{MB}{MD}=\frac{\sin\angle CMD}{\sin\angle BMC}$

$S_{A_1MB_1}=S_{MB_1C_1} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot A_1M\cdot \cancel{MB_1}\cdot \sin\angle AMB = \frac{1}{2}\cdot \cancel{MB_1}\cdot MC_1\cdot \sin\angle B_1MC_1$

$A_1M\cdot \sin\angle AMB = MC_1\cdot \sin\angle BMC$

$\frac{A_1M}{MC_1}=\frac{\sin\angle BMC}{\sin\angle AMB} \Rightarrow \frac{A_1M}{MC_1}=\frac{AM}{MC}$

т.к. $A_1\in AM$ и $C_1\in MC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle A_1MC_1 \in (AMC) \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle A_1MC_1$ и $\triangle AMC$ лежат на одной плоскости

$\angle AMC$ - общий для $\triangle AMC$ и $\triangle A_1MC_1$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle A_1MC_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MA_1C_1=\angle MAC \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1C_1 \parallel AC$ (по равенству соответствующих углов при секущей AM)

+

$S_{MB_1C_1}=S_{MC_1D_1} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot MB_1\cdot \cancel{MC_1}\cdot \sin\angle BMC = \frac{1}{2}\cdot \cancel{MC_1}\cdot MD_1\cdot \sin\angle CMD$

$MB_1\cdot \sin\angle BMC = MD_1\cdot \sin\angle CMD$

$\frac{MB_1}{MD_1}=\frac{\sin\angle CMD}{\sin\angle BMC} \Rightarrow \frac{MB_1}{MD_1}=\frac{MB}{MD}$

т.к. $B_1\in BM$ и $D_1\in DM \Rightarrow \triangle MB_1D_1 \in (BMD) \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle MB_1D_1$ и $\triangle BMD$ лежат в одной плоскости

$\angle BMD$ - общий для $\triangle MB_1D_1$ и $\triangle BMD$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BMD \sim \triangle B_1MD_1 \Rightarrow \angle BDM=\angle B_1D_1M \Rightarrow$

+

$\Rightarrow B_1D_1 \parallel BD$ (по равенству соответствующих углов при секущей MD)

A_1C_1 и $B_1C_1 \in (A_1B_1C_1)$

AC и $BD \in (ABC)$ $\Bigg\} \Rightarrow$ т.к. $A_1C_1 \parallel AC$ и $B_1D_1 = BD$, то $(ABC)\parallel(A_1B_1C_1)$

||

Оценочные баллы: максимальный – **7 баллов**; фактический __________ **баллов.**

Подписи членов жюри ______________________________

ЗАДАЧА № 11.4

Рассмотрим некоторые варианты рассадки за завтраком. Пусть какие-то 2 лжеца (с возрастами a_1 и a_2) сидят рядом за столом ($a_1 > a_2$). Тогда у лжеца с возрастом a_1 действительно имеет младшего соседа-лгуна => будет вынужден сказать „Нет", что это противоречит действительности =>

=> Лемма 1: Никакие 2 лжеца не сидели вместе за завтраком.

Тогда между каждыми двумя лжецами сидит хотя бы один правдивец => правдивцев (п) больше, чем лжецов (к)

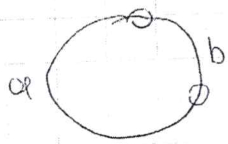
$\begin{cases} п+к=7 \\ п>к \end{cases} \Rightarrow к+к<7 \Rightarrow 2к<7 \Rightarrow к<3{,}5 \Rightarrow к \le 3 \Rightarrow$ за столом не более трех лжецов.

Заметим том же, что никакие три правдивца не могут сидеть подряд. В таком случае „средний" правдивец имеет двух соседей-правдивцев и должен будет сказать „Нет" =>

=> Лемма 2: Никакие 3 правдивца за завтраком не сидели подряд.

Докажем того, что за столом должно быть лишь 3 лжеца. Для этого рассмотрим случаи, когда их 2 и 1

Когда их 2:



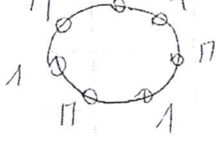
Стол разбивается лжецами на 2 дуги, в каждой из которых a и b правдивцев (из Леммы 1: $a>1$, $b>1$)

тогда $a+b=5$ (все правдивцы) => различные пары a и b: $(1;4)$ и $(2;3)$.

Однако каждая такая пара противоречит Лемме 2.

Когда их 1: оставшиеся 6 правдивцев сидят подряд и это противоречит Лемме 2.

Пример рассадки для трех правдивцев:



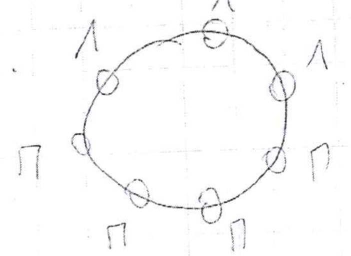
КОД М-11-5

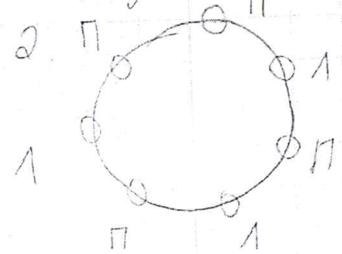
Лист 5 из 6

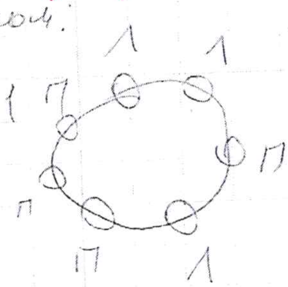
ЗАДАЧА № 11.4. (продолжение)

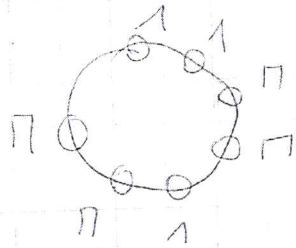
почему 3л, 4п? (доказано ранее)

Рассмотрим возможные рассадки за ужином.

1.


2


3.1


3.2


Прежде чем приступить к вариантам рассадки за ужином введем

Лемму 3: Если за ужином 2 правдивца сидят рядом за ужином, то один из точно скажет „Да"

Дадим им возраста b_1 и b_2 такие, что $b_2 > b_1$. Тогда обладатель возраста b_2 действительно имеет младшего соседа - правдивца и скажет „Да"

Теперь рассмотрим случаи рассадки за ужином:

1: Все три лжеца сидят рядом. Тогда первое „Да" произносит из уст „крайнего" лжеца, т.к. он не имеет соседей-правдивцев, но говорит об этом. Оставшиеся 4 правдивца сидят рядом => по лемме 3 один из них точно скажет „Да"

3.1: рядом сидят какие-то 2 лжеца, а третий делит правдивцев на дуги по 3 и 1. ($c_1>c_2>c_3$)
Тогда рассмотрим ряд из трех правдивцев: их возрасты c_1, c_2 и c_3
Заметим, что всего есть 3 различные рассадки этих трех правдивцев: (c_1,c_2,c_3), (c_1,c_3,c_2), (c_2,c_1,c_3) (Остальные рассадки будут зеркальны этим трем). Тогда т.к. $c_1>c_2>c_3$, $c_1>c_3<c_2$, $c_2<c_1>c_3$, то всегда 2 правдивца скажут „Да" (в первом случае 1 и 2, во втором 1 и 2

Оценочные баллы: максимальный – **7 баллов**; фактический __________ **баллов.**

Подписи членов жюри ______________________________