УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ Г. ХАБАРОВСКА

МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

1	2	3	4	5	Σ
7рд	7рд	0нд	7нд	7нд	~~28~~ 35
7нд	7нд	0рд	7рд	7рд	

КОД: М-11-1

№ 11.1 $(x^2+y^2)^2-1-4x^2y^2 = x^4+2x^2y^2+y^4-1-4x^2y^2 =$
$= x^4-2x^2y^2+y^4-1 = (x^2-y^2)^2-1 = (x^2-y^2-1)(x^2-y^2+1)$

7б

№ 11.2 По т. Виета $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ (x_1, x_2 – различные корни трёхчлена)

Из условия $x_1x_2 = a\cdot b\cdot c$; отсюда

$\frac{c}{a} = a\cdot b\cdot c$, т.к. $c \neq 0$ по усл $\Rightarrow a^2 b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a^2}$.

~~а~~ т.к. $a^2 \in \mathbb{N}$, то $b = \frac{1}{a^2} \in \mathbb{Z}$ только при $a^2 = 1$.

$a = \pm 1$; $b = +1$. Рассмотрим 2 случая: $a=1$ и $a=-1$

1) $a = +1$ Если у квадратного трёхчлена 2 различных корня, то его $D>0$, и наоборот. Следовательно

$b^2-4ac>0 \Rightarrow 1^2-4c>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c < \frac{1}{4}$. Т.к. $c\in\mathbb{Z}$ и $c\neq 0$, то

$c\in(-\infty;-1]$ $c\in\mathbb{Z}$.

Тогда $abc = 1\cdot 1\cdot c = c$;

$abc \in (-\infty;-1]$, $abc\in\mathbb{Z}$

2) $a=-1$. Аналогично случаю 1) $D>0$

$b^2-4ac>0 \Rightarrow 1+4c>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c > -\frac{1}{4}$. Т.к. $c\in\mathbb{Z}$ и $c\neq 0$, то

$c\in[1;+\infty)$, $c\in\mathbb{Z}$. Тогда

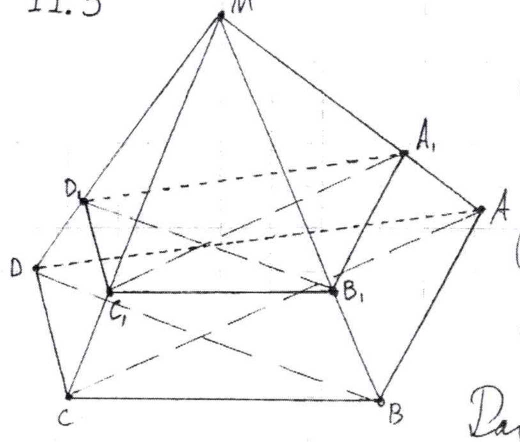
$abc = (-1)\cdot 1\cdot c = -c$;

$abc\in(-\infty;-1]$, $abc\in\mathbb{Z}$.

Для любого $n\in(-\infty;-1]$ подбираются коэффициенты $a=1; b=1; c=n$, что $abc = n$

Ответ: $abc\in(-\infty;-1]$, $abc\in\mathbb{Z}$ 7б

№ 11.5



Заметим, что

(1) $2S_{ABM} = MB \cdot MA \cdot \sin(\angle AMB) = 2S_{BCM} = MB \cdot MC \cdot \sin(\angle BMC)$ и

(2) $2S_{A_1B_1M} = MB_1 \cdot MA_1 \cdot \sin(\angle A_1MB_1) = 2S_{B_1C_1M} = MB_1 \cdot MC_1 \cdot \sin(\angle B_1MC_1)$.

Разделив (2) на (1), получим

$$\frac{S_{A_1B_1M}}{S_{ABM}} = \frac{S_{B_1C_1M}}{S_{BCM}} = \frac{MB_1 \cdot MA_1 \cdot \sin(\angle A_1MB)}{MB \cdot MA \cdot \sin(\angle AMB)} = \frac{MB_1 \cdot MC_1 \cdot \sin(\angle B_1MC_1)}{MB \cdot MC \cdot \sin(\angle BMC)}$$

Т.к. ($\angle A_1MB_1 = \angle ABM$ и $\angle B_1MC_1 = \angle BMC$) их синусы равны, и

$\dfrac{MA_1}{MA} = \dfrac{MC_1}{MC}$. Т.к. $\angle A_1MC_1 = \angle AMC$, то $\triangle A_1MC_1 \sim \triangle AMC$, и

$A_1C_1 \parallel AC$. Аналогично получаем $B_1D_1 \parallel BD$. ($(A;B;C)$ - плоскость ABC)

Т.к. $A_1C_1 \parallel AC$, а $AC \subset (A;B;C)$, то $A_1C_1 \parallel (A;B;C)$. Аналогично $B_1D_1 \parallel (A;B;C)$. Т.к. прямые A_1C_1, B_1D_1 $\subset (A_1;B_1;C_1)$, ($A_1C_1 \nparallel B_1D_1$ (диагонали $ABCD$)) параллельны плоскости $(A;B;C)$, то $(A_1;B_1;C_1)$, содержащая A_1C_1 и B_1D_1, параллельна $(A;B;C)$, т.е. $(A_1;B_1;C_1) \parallel (A;B;C)$, ч.т.д.

X ?

№11.3 Назовём это число ~~A~~ X. Пускай A $\vdots$ 111. Тогда

*если в X знаков > n, то $x_1 = 1$, остальные — нули. тогда $10 \vdots 11$

$X \vdots 111 = \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$. В таком случае можно представить X как*

$$\overline{x_1 x_2 \ldots x_{n+2}} = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n 00} + \overline{a_1 \ldots a_n 0} + \overline{a_1 \ldots a_n}$$

~~Заметим, что $x_1 \le a_1 + 1$ (т.к. в меньшем разряде либо $a_1 + a_2 < 10$ и $x_1 = a_1$, либо $10 \le a_1 + a_2 < 20$, $x_1 = a_1$)~~

Заметим, что $x_{n+2} = a_n$. Если $x_{n+1} \ne a_n + a_{n-1}$, то $x_{n+1} < a_n$, т.к. x_{n+1} — остаток при делении $a_n + a_{n-1}$ на 10, а т.к. $0 \le a_{n-1} < 10$, то остаток от деления $a_n + a_{n-1}$ на 10 не больше, чем при делении a_n, т.е. не больше a_n. В таком случае $x_{n+1} \le x_{n+2}$, что противоречит условию.

Значит, $x_{n+1} = a_n + a_{n-1} < 10$. Аналогично рассуждая, получаем, что $x_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} < 10$, т.к. иначе $x_n < x_{n+1}$. (БАЗА индукции)

a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	
a_{n-1}	a_n		
x_{n-1}	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}

$x_i = a_i + a_{i-1} + a_{i-2} < 10$

Пускай на каком-то участке суммы ~~$x_i < x_{i-1} \ldots$~~ $(i > 3)$

Тогда $a_{i-1} + a_{i-2} + a_{i-3} < 10$,

т.к. $a_{i-1} + a_{i-2} + a_{i-3} = (a_i + a_{i-1} + a_{i-2}) + (a_{i-3} - a_i)$, причём $0 < (a_i + a_{i-1} + a_{i-2}) < 10$,

$10 > (a_{i-3} - a_i) > -(a_i + a_{i-1} + a_{i-2})$ (в противном случае $a_{i-1} + a_{i-2} + a_{i-3}$ — отрицательное число),

и если $(a_i + a_{i-1} + a_{i-2}) + (a_{i-3} - a_i) \ge 10$, то $x_{i-1} < x_i$ как остаток от деления на 10.

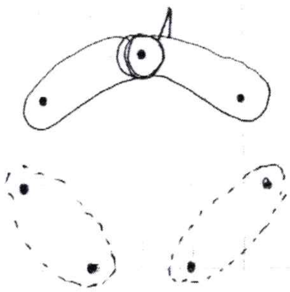
(Шаг индукции).

Из этого следует, что $a_1 + a_2 + a_3 = x_3 < 10$. Но тогда $x_2 = a_1 + a_2 = (a_1 + a_2 + a_3) - a_3 = x_3 - a_3$, и т.к. $a_3 \ge 0$, то $x_2 \le x_3 - 0$; $x_2 \le x_3$, что противоречит условию. Значит, такое число X не может делиться на 111

Ответ: Нет, не может.

~~4990 + 990 + 99 = 5439~~ ~~$9 < 10$~~ неверно!

№ 11.4 1) За завтраком два лжеца не могли сидеть рядом, т.к. в противном случае тот из них, кто старше другого (такой есть, оба разного возраста) сидел бы рядом с младшим лжецом, и на вопрос Белоснежки ответил бы „нет". Если есть хотя бы 4 лжеца, то двое из них сидят рядом. Докажем это. Предположив обратное, разместим первого лжеца. Тогда 2 места рядом



могут занимать только правдорубы, и для трех лжецов остается 4 места. Разбив их же на 2 пары рядомстоящих, можно утверждать, что хотя бы 2 из 3х лжецов попадут в одну (из 2х) пару стульев и будут сидеть рядом. Противоречие с предположением.

Значит, лжецов не больше 3х, и правдорубов хотя бы 4. +

2) Самый младший гном - лжец, т.к. за завтраком он не мог сидеть с лжецом, младшим него, ~~но~~ а ответил „да". За ужином он также не может ~~сет~~ сесть ни с кем, в т.ч. правдорубом, младшим него, и ответит „да", утверждая, что сидит +

3) Т.к. правдорубов хотя бы 4, за ужином хотя бы двое сядут рядом (док-во уже приведено для лжецов). Т.к. один из них обязательно старше, он честно ответит „да" на вопрос Белоснежки.

4) Поскольку младший лжец и какой-то правдоруб не могут быть одним и тем же гномом, то хотя бы они двое за ужином ответят Белоснежке „да", ч.т.д.