№	1	2	3	4	5	Σ	
	7	7	7	0	7	28	

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.1	ЛИСТ 1 ИЗ 5	М-11-24 ШИФР УЧАСТНИКА

$2^x \cdot x + 2^y \cdot y \geq 2^y \cdot x + 2^x \cdot y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$ ← требуется доказать

$2^x \cdot x + 2^y \cdot y - 2^y \cdot x - 2^x \cdot y \geq 0$

← преобразуем (равносильные переходы)

$x(2^x - 2^y) - y(2^x - 2^y) \geq 0$

$(2^x - 2^y)(x - y) \geq 0$, полученное неравенство равносильно данному в условии, поэтому если оно справедливо при $x \geq 0$ и $y \geq 0$, то и изначальное (данное в условии) неравенство справедливо при $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Имеем: $(2^x - 2^y)(x - y) \geq 0$, $x \geq 0$ и $y \geq 0$; Р: 1) $x \geq y$; 2) $x \leq y$

1) тогда $x = y + k$, $k \geq 0$

$(2^{y+k} - 2^y)(y + k - y) \geq 0$

$2^y(2^k - 1)(k) \geq 0$, верно при любых неотрицательных y и k, т.к. $2^y > 0$, $2^k \geq 1$ при $k \geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^k - 1 \geq 0$, $k \geq 0$, произведение неотрицательных чисел неотрицательно

2) тогда $y = x + k$, $k \geq 0$

$(2^x - 2^{x+k})(x - x - k) \geq 0$

$2^x(1 - 2^k)(-k) \geq 0$

$2^x(2^k - 1)(k) \geq 0$, верно при всех неотрицательных x и k (аналогично п. 1))

Получается, $(2^x - 2^y)(x - y) \geq 0$ при $x \geq 0$ и $y \geq 0$, а значит и исходное неравенство справедливо при $x \geq 0$ и $y \geq 0$, т.е.:

$2^x \cdot x + 2^y \cdot y \geq 2^y \cdot x + 2^x \cdot y$ справедливо для любых неотрицательных чисел x и y, чтд.

7

Председатель жюри: [подпись] Мендель К.К.

Члены жюри: [подпись] (Дубинская И.А.)

М.Кипер (М.Г. Кипер)

[подпись] Богоутдинова Ю.Г.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ №11.2	ЛИСТ 2 ИЗ 5	М-11-24 ШИФР УЧАСТНИКА

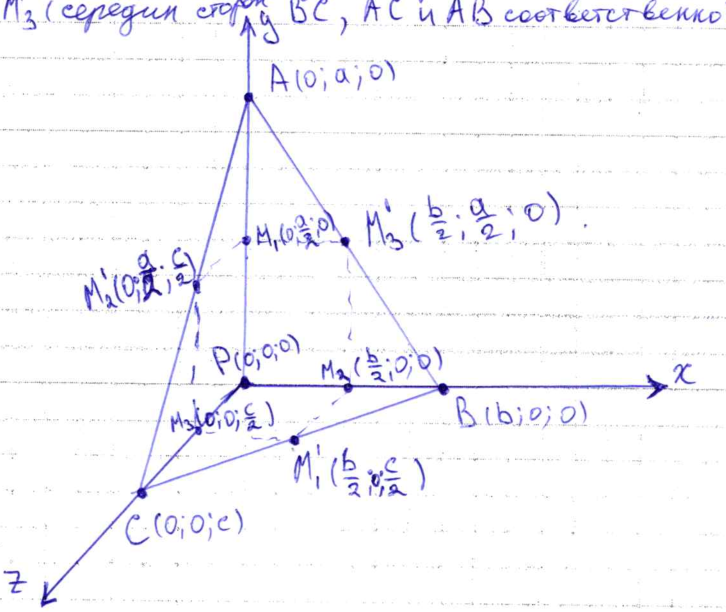
Рассмотрим всё в общем виде. На доске записаны числа $1, 2, \ldots, n$, где $n \vdots 50 \Rightarrow n = 50z$, $z \in N$. Σ всех этих чисел (назовём её Σ_1) равна:
$\Sigma_1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{50z(50z+1)}{2} = 25z(50z+1) = 25 \cdot 50 \cdot z^2 + 25z^*$.
Σ всех чисел, $\vdots 50$ (назовём её Σ_2) равна: $\Sigma_2 = 50 + 100 + \ldots + n = 50 + 100 + \ldots + 50z =$
$= 50(1 + 2 + \ldots + z) = 50 \cdot \frac{z(z+1)}{2} = 25z(z+1) = 25z^2 + 25z$.
Если стереть с доски все числа, которые делятся на 50, то Σ оставшихся (назовём её Σ_3) будет равна: $\Sigma_3 = \Sigma_1 - \Sigma_2 = 25 \cdot 50 \cdot z^2 + 25z - 25z^2 - 25z =$
$= 25 \cdot 50 \cdot z^2 - 25z^2 = 25z^2(50-1) = 5^2 z^2 \cdot 49 = (5 \cdot z \cdot 7)^2 = (35z)^2$, т.к. $z \in N$, то $35z \in N$
То есть, сумма оставшихся чисел является квадратом натурального числа $35z$. Незнайка прав.

7

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ №11.3	ЛИСТ 3 ИЗ 5	М-11-24 ШИФР УЧАСТНИКА

Введём ПСК (тетраэдр PABC (P-вершина)) так, что вершина P тетраэдра будет лежать в начале координат, а ~~стороны~~ рёбра PA, PB и PC будут лежать на положительных полуосях Oy, Ox и Oz соответственно. Пусть $PA=a$, $PB=b$, $PC=c$. Тогда отметим в ПСК координаты точек P, A, B, C и ~~середины сторон~~ M_1, M_2, M_3 (середин сторон PA, PB и PC соответственно), а также M_1', M_2', M_3' (середин сторон BC, AC и AB соответственно)



Отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер: M_1M_1', M_2M_2', M_3M_3'.

$$M_1M_1' = \sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$M_2M_2' = \sqrt{\left(0-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(\frac{c}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$M_3M_3' = \sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow M_1M_1' = M_2M_2' = M_3M_3'$, то есть отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер равны, чтд.

Замечание: мы можем ввести ПСК таким образом, потому что плоские $\angle$ при вершине тетраэдра прямые, т.е. $\angle CPA = \angle BPA = \angle BPC = 90°$.

7

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.4	ЛИСТ 4 ИЗ 5	М-11-24 ШИФР УЧАСТНИКА

$2023^6 = 2023^2 \cdot 2023 \cdot 2023^2 \cdot 2023 = 4\,092\,529 \cdot 2023 \cdot 4092529 \cdot 2023 =$

$= 8\,279\,186\,167 \cdot 8\,279\,186\,167 = 68\,545\,013\,587\,853\,151\,889$

Таким образом, в десятичной записи этого числа есть 3 одинаковые цифры (например, ровно три цифры 1), чтд.

Вычисления:

$$\begin{array}{r} 2023 \\ \times\ 2023 \\ \hline 6069 \\ +\ 40460 \\ +\ 4046000 \\ \hline 4092529 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,092\,529 \\ \times\ 2\,023 \\ \hline 12.277.587 \\ +\ 81.850.580 \\ +\ 8.185.058.000 \\ \hline 8.279.186.167 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8.279.186.167 \\ \times\ 8.279.186.167 \\ \hline 57.954.303.169 \\ +\ 496.751.170.020 \\ +\ 827.918.616.700 \\ +\ 49.675.117.002.000 \\ +\ 662.334.893.360.000 \\ +\ 827.918.616.700.000 \\ +\ 74.512.675.503.000.000 \\ +\ 579.633.031.690.000.000 \\ +\ 1.655.837.233.400.000.000 \\ +\ 66.233.489.336.000.000.000 \\ \hline 68.545.013.587.853.151.889 \end{array}$$

—

0б

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.5	ЛИСТ 5 ИЗ 5	М-11-24 ШИФР УЧАСТНИКА

Ответ: 200.

Приведём пример, подтверждающий возможность наличия ровно 200 пар:

Пример (+)

Рассадим всех людей по вершинам правильного 400-угольника (1 человек на 1 вершину), пускай каждый из них улыбнётся 200 людям, сидящим от него по часовой стрелке. Тогда получится, что каждый (первым) из людей образует пару с диаметрально противоположным ему человеком и ни с кем более (П: значит найдётся человек имеющий пару с кем-то кроме диаметрально противоположного, но тогда расстояние между ними по часовой стрелке в одном случае меньше 200 человек, а в другом — больше, а значит тот человек, который сидит на расстоянии меньшем 200 человек по часовой стрелке не мог улыбаться второму, получим противоречие, П н/в), таким образом 400 человек разбиваются по парам, образуя ровно 200 пар.

Оценка (+)

Теперь докажем, что пар не может быть меньше 200 (тогда 200 пар — действительно минимальное кол-во). П: пар меньше 200, тогда пусть пар $200-k$, $k \in N$, тогда кол-во улыбок в этих парах: $400-2k$ (в каждой паре 2 улыбки); всего улыбок: 400 человек по 200 улыбок — $400 \cdot 200 = 80\,000$ улыбок; улыбок без пар: $80000-(400-2k) = 79600+2k$. Представим людей в виде графа с 400 вершинами, тогда пары улыбок — два ребра между двумя верш., а улыбка без пары одно ребро м/у двумя вершинами. Тогда в нашем графе 400 вершин, кол-во ребер полного графа с 400 вершинами $\frac{400(400-1)}{2} = 200 \cdot 399 = 79800$; в нашем графе $79600 \overset{+2k}{}$ одиночных ребер и $200-k$ двойных, заменим двойные одиночными, тогда наш граф станет полным, кол-во ребер в нем $79600+2k+200-k = 79800+k$, т.к. $k \in N$, то $79800+k > 79800 \Rightarrow$ ~~в~~ наш граф не явл. полным $\Rightarrow$ получили противоречие, П н/в, чтд.

75