ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 1	ЛИСТ 1 ИЗ 6	М-11-8 ШИФР УЧАСТНИКА

$2^x x + 2^y y \geq 2^y x + 2^x y \quad (x;y) \geq 0$

$2^x(x-y) + 2^y(y-x) \geq 0$; $\cancel{(x-y)(2^x-2^y) \geq 0}$

Не нарушая общности пусть $x \geq y$, ~~тогда~~ ~~тогда~~ тогда

$2^x(x-y) + 2^y(y-x) \geq 0$

$(x-y)(2^x-2^y) \geq 0$

$(x-y) \geq 0$, и $(2^x-2^y) \geq 0$, т.к. $f(x)=2^x$ – функция возрастает на R (т.к. $2>1$), т.е. $2^{x_1} \geq 2^{x_2}$, если $x_1 \geq x_2$, т.е.

$(x-y)(2^x-2^y) \geq 0$ – верно, где $(x;y) \geq 0$, т.е.

$2^x x + 2^y y \geq 2^y x + 2^x y$ – верно, где $(x;y) \geq 0$ 7б

1	2	3	4	5	Σ
7	0	7	7	0	21

Председатель ~~жюри~~ жюри: Мехтиев В.Р.

Члены жюри: (Дубинская И.А.)

М.Кеш (Кеш М.Г.)

Болотдинова Ю.Г.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 2.	ЛИСТ 2 ИЗ 6	М-11-8 ШИФР УЧАСТНИКА

$1, 2, \dots, n$ $\quad n \vdots 50$

Рассмотрим все натуральные числа и выпишем в ряд и вычеркнем оттуда ~~к~~ числа, которые $\vdots 50$ ~~к~~, тогда мы разобьём их на промежутки

$\underbrace{1, 2, \dots, 49}_{1}, \text{—}, \underbrace{51, \dots, 99}_{2}, \text{—}, \underbrace{\dots}, \dots$

сумма чисел в каждом таком промежутке $\vdots 25$, а количество чисел в ~~равно~~ каждом промежутке $= 49$

Пометим промежутки нечётными числами с 1. $(1; 49)$; $(51; 99)$ и т.д. Тогда сумма чисел в промежутке будет равна $k \cdot 25 \cdot 49$, где k - его номер, т.к. т.к.

?

рассмотрим промежуток $pn+1; \dots; pn+49$, где $p \in \mathbb{N}$; $n \vdots 50$; $S = \frac{2pn+50}{2} \cdot 49 = (pn+25) \cdot 49$, $n \vdots 50$, т.е. $S \vdots 25$. Рассмотрим предыдущий промежуток, тогда $S = (pn-25) \cdot 49 = \frac{pn-1+pn-49}{2} \cdot 49$; Разница сумм чисел в этих промежутках равна 50 по модулю, т.е. сумма чисел в промежутке на 50 больше суммы чисел в предыдущем промежутке, т.е. рассмотрим 1-ый промежуток $(1; \dots; 49)$ $S_1 = 25 \cdot 49$, тогда сумма в следующем ем $S_{2(3)} = ~~?~~ S_1 + 50 = 3 \cdot 25 \cdot 49$ и т.д.

нет

т.е. если пометить промежутки числами $\vdots 2$ с 1, то S - сумма чисел в них равна $k \cdot 25 \cdot 49$, где k - его номер (число которым пометили промежуток) т.е. вся сумма S, пусть Σ равна

$\Sigma = 25 \cdot 49 \underbrace{(1 + 3 + \dots + 2m+1)}_{\text{сумма нечёт. чисел}} = 25 \cdot 49 \cdot \frac{1+2m+1}{2} \cdot \frac{2m+2}{2} =$

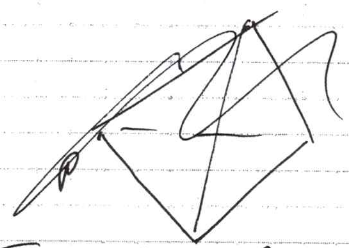
$= 25 \cdot 49 \cdot (m+1)^2$, где $m \in \mathbb{N}$

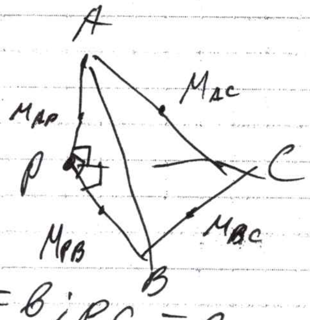
$= 5^2 \cdot 7^2 \cdot (m+1)^2$, т.е.

Незнайка прав. 0б

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 3	ЛИСТ 3 ИЗ 6	М-11-8 ШИФР УЧАСТНИКА





Пусть $AP = a$; $BP = b$; $PC = c$

Пусть ~~серед~~ M_{AP} - середина AP и M_{BC} - середина BC, ~~т.к~~ $\triangle PBC$; т.к. $\angle BPC = 90^\circ$ и BC - гипотенуза, то $PM_{BC} = BM_{BC} = M_{BC}C = \frac{1}{2}\sqrt{BP^2 + PC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}$

т.к. $AP \perp PB$ и $AP \perp PC$, то $AP \perp (PBC)$, т.к. $PM_{BC} \in (PBC)$, то $\triangle M_{AP}PM_{BC}$ - прямоуг., т.к. $\angle M_{AP}PM_{BC} = 90^\circ$, т.е. $M_{AP}M_{BC} = \sqrt{M_{AP}P^2 + M_{BC}P^2}$ (т. Пифагора для $\triangle M_{AP}PM_{BC}$)

т.к. M_{AP} - середина, то $PM_{AP} = \frac{a}{2}$, т.е. $M_{AP}M_{BC} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2+c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ~~пусть М~~

Пусть M_{AC} - середина AC, тогда т.к. $\triangle APC$ - прямоуг., где AC - гип., то $PM_{AC} = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AP^2+PC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}$

Пусть M_{PB} - середина BP, ~~тогда~~ т.к. $PB \perp AP$ и $PB \perp PC$, то $PB \perp (APC)$, т.к. $PM_{AC} \in (APC)$, то $\angle M_{AC}PM_{PB} = 90^\circ$, $\triangle M_{AC}PM_{PB}$: т. Пифагора: $M_{PB}M_{AC} = \sqrt{PM_{PB}^2 + PM_{AC}^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2+c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, аналогично получаем, что $M_{PC}M_{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ / ч.т.д.

7

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 4	ЛИСТ 4 ИЗ 6	М-11-8 ШИФР УЧАСТНИКА

~~(2023)~~ т.к. $2023 \equiv 1 \mod(3)$

то $(2023)^6 \equiv 1 (\mod 3)$

Пусть $\alpha(n)$ – количество цифр в числе n.

$\alpha(2023) = 4$

$\alpha(2023^2) = \alpha(4092529) = 7$

$2023 = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 3$

$(2023)^2 = 4 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 9$

$\cancel{\alpha(2023^6) \geq 18}$ $\alpha(2023^6) = \alpha\left(\sum_{k=0}^{6} C_6^k (2 \cdot 10^3)^{6-k} (23)^k\right) \Rightarrow \alpha \geq 20$

$(2^6 \cdot 10^{18} + \ldots)$

$\cancel{\alpha(2023^6} \ \cancel{\alpha(n) = \nu_{10}(n)}$

~~Допустим~~, что нет 3 одинаковых цифр, ~~тогда~~ ~~тогда~~ ~~разобь~~ в (2023^6) ~~на~~ кол-во цифр ≥ 20, т. ~~к~~ ~~разобье~~ нет 3-ёх одинаковых, то ~~цш~~ у ~~если~~ $\cancel{\alpha(2023)^6 = 19}$, ~~то у 9~~

~~t20~~ $\alpha(2023^3) = 10$, т.к. $2023^3 = (4 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 9)(2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 3) = 8 \cdot 10^9 + 6 \cdot 10^7 + 18 \cdot 10^7 + \ldots$

(другие не дадут 10) $= 8 \cdot 10^9 + 2 \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^7$

$\alpha(2023)^4 = \alpha((8 \cdot 10^9 + 2 \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^7 + \ldots)(2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 3)) =$

$= \alpha(16 \cdot 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 16 \cdot 10^{11} + \ldots) = \alpha(10^{13} + 6 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{12} + \ldots) =$

$= \alpha(10^{13} + 8 \cdot 10^{12} + \ldots) = 14$

$\cancel{\alpha(2023^5) = \alpha((10^{13} + 8 \cdot 10^{12} + \ldots)(2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 3))} =$

$\cancel{= \alpha(2 \cdot 10^{16} + 16 \cdot 10^{15} + \ldots) = \alpha(3 \cdot 10^{16} + 6 \cdot 10^{15})} = 17$

$\cancel{\alpha(2023^6) = \alpha((3 \cdot 10^{16} + 6 \cdot 10^{15} + \ldots)(2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 3))} =$

$\cancel{= \alpha((6 \cdot 10^{19} + \ldots))} = 20$ $\alpha((2 \cdot 10^3 + 23)^6) = \alpha\left(\sum_{k=0}^{6} C_6^k a^k b^{6-k}\right) = 2^6 \cdot 10^{18} + 6 \cdot 2^5 \cdot 10^{15} \cdot 23 + \ldots$ ~~19+1=20~~

т.к. цифр 10 не будет по

Если $\alpha = 20$, т.е. разобьём на 10 групп ~~по~~ 2 цифре в каждой, $\alpha \geq 2$

т.к. всего ~~цифр 10~~, то все цифры будут использованы ~~не нарушая~~.

1;1	2;2	3;3	4;4	5;5	6;6	7;7	8;8	9;9	0;0	– цифры
2	1	0	2	1	0	2	1	0	0	– остаток mod 3

т.е. число делится на 3, но $(2023)^6 \equiv 1 \mod(3)$ – противоречие,

т.е. найдутся 3 одинаковые цифры

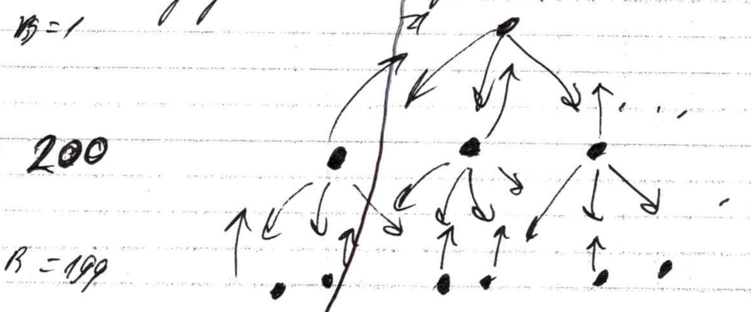
Если $\alpha \geq 21$, то по принципу Дирихле в 1-ой группе будут 3 одинаковые цифры.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 5	ЛИСТ 5 ИЗ 6	М-11-8 ШИФР УЧАСТНИКА

$B = 400$ - количество вершин в графе

Рассмотрим такой граф, где стрелкой покажем кто куда смотрит



кол-во пар, которые смотрят друг на друга, равно $200 + 199 \cdot 200 = 200^2$

~~Допустим может быть меньше~~ $\cancel{199}$ $200^2 - 1 = 199 \cdot 201$

~~в 1-ой паре 2 ребра всего рёбер в парах~~ ~~39~~. Если ~~стрелки направлены~~ ~~та~~ пусть это будет рёбра направлены так ⇄, то 1-ребро, тогда наш граф будет являться деревом. 1=В 200=В 199=В

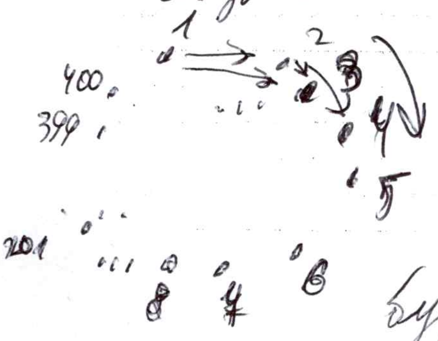
Пусть Е - сумма степеней вершин, а Р - количество рёбер в графе; $E = 400 \cdot 200$, тогда $P = 200^2$.

$2P = E$

Пусть В - кол-во вершин в графе, Р - кол-во рёбер и Е - сумма всех степеней ~~вершин~~ выходящих рёбер из вершин

~~$B = 400$,~~ из ~~которых~~

Разместим их всех по кругу и пронумеруем



Пусть 1-ый смотрит на (2; 3; ...; 201)

2-ой на (3; 4; 5; 202)

3-ий на (4; 5; 6; 203), т.е.

т.е. пусть к-номер смотрит ~~на~~ по часовой стрелке, заметим, что тогда макс. номер, который можно будет посмотреть какому-то номеру, должен давать в разности по модулю 200 ~~тогда~~ ~~его не~~ макс. номера и своего номера, тогда мы получим 1-пару, которые смотрят друг на друга. Допустим может быть 0, тогда $E = 400 \cdot 200$; $P = 200^2$; $B = 400$; Уберём 1 вершину ~~на которую никто не~~, останется $B = 399$; $P = 200^2 - 200$

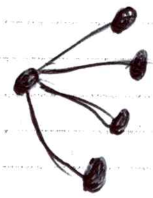
Ответ: 1

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 5	ЛИСТ 6 ИЗ 6	М-11-8 ШИФР УЧАСТНИКА

~~Уберём 1-вершину~~

Будем убирать вершины, на которых нет пар, в конце концов останутся 2 вершины



~~Е уберём 1 вершину~~

~~$E = 400 \cdot 200 - 400$~~ — т.е. сколько бы ~~вершин не убирали~~ $E \vdots 2$

Уберём 1 вершину и заметим, что $E = 400 \cdot 200 - 200k \cdot 2k$ $E \vdots 2$, т.е. сколько бы вершин мы бы не убрали $E \vdots 2$, тогда когда у нас останется 2-вершины, то ~~но~~ из предположения $E = 1$, но $E \vdots 2$, т.е. противоречие, т.е. ~~0~~ меньше 1-ой такой пары быть не может.

Ответ: 1

Допустим их 0, тогда ни одна вершина не соединена 2-мя рёбрами, $B = 400$, $P = 200 \cdot 400$, тогда $E = 400^2$, т.к. $2 \cdot P = E$

200

200 + 199

199

399

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № [illegible]	ЛИСТ___ИЗ___	ШИФР УЧАСТНИКА

$\lambda(2023^6) = \lambda((2\cdot 10^3 + 23)^6) = \lambda\left(\sum_{k=0}^{6} C_6^k a^{6-k} b^k\right) \Rightarrow \lambda(2023^6) \cancel{\geq} 6$

Если ~~$\lambda > 2$~~ $\lambda(2023^6) \geq 21$, то ~~по~~ по принципу Дирихле будут хотябы 3 одинаковые цифры

Если $\lambda = 19$, то

~~1;1~~ 2;2

группы по 2 ~~числа~~ цифры (9 таких групп)

1 ~~шт~~ цифра

4 - остатка по 0 (0+0; 3+3; 6+6, 9+9)

3 - остатка по 2 (1+1; 4+4; 7+7)

3 - остатка по 1 (2+2; 5+5; 8+8)