1	2	3	4	5	Σ
7	7	2	3	7	26

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-8-16 ШИФР УЧАСТНИКА

Пусть наше искомое число равно $\overline{abc}$, тогда по условию: $\overline{bc}+\overline{ac}+\overline{ab}=100$, но $\overline{bc}+\overline{ac}+\overline{ab}=$
$=(10b+c)+(10a+c)+(10a+b)=$
$=11b+2c+20a \Rightarrow 11b+2c+20a=100$, заметим, что $2c$ и $20a \vdots 2$ и $100 \vdots 2$
$\Rightarrow 11b \vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2$, тогда
пусть $b=2$, тогда $2c+20a=78$
$\Rightarrow c+10a=39 \Rightarrow$ пусть $a=3$ и $c=9$,
тогда $\overline{abc}=329$, проверим:
$29+39+32=100 \Rightarrow 329$ - подходит

Ответ: 329

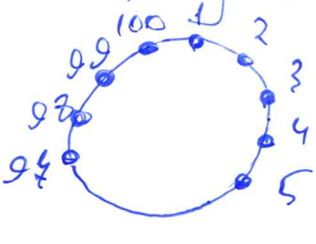
7б

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-8-16 ШИФР УЧАСТНИКА

Можно, пусть первый рыцарь поменяется сначала с четвертым, потом с седьмым, затем с десятым и так далее номер каждого следующего рыцаря с которым поменялся первый будет на три больше предыдущего, таким образом он доберется до 94-го рыц. потом до 97-го рыц., затем до 100-го и наконец доберется до третьего следующим ходом. Тогда в этот момент 4-ый будет на месте первого, 7-ой на месте 4-ого ... 100-ый на месте 97-ого и 3-ий на месте 100-го. Тогда пусть 3-ий поменяется с 100-ым, тогда 100-ый вернется на изн. позицию, а 3-ий на место 97-ого, затем с 97-ым, который будет на месте 94-ого и так далее пока он не поменяется с 7-ым на месте 4-ого и затем с 4-ым который будет на месте первого, таким образом все те рыцари кроме 1-го и 3-го которые были задействованы вернутся на свои места, а остальные останутся нетронутыми, а 3-ий попадет на место первого и первый на место третьего => условие задачи выполнено.

Ответ: Можно



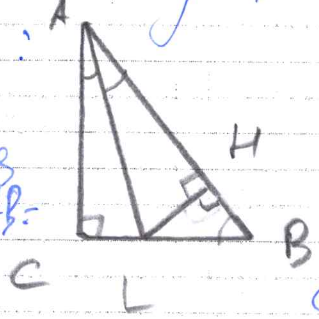
7б

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 3	ЛИСТ 1 ИЗ 2	М-8-16 ШИФР УЧАСТНИКА

Возможны два случая:

случай 1: AL – биссектриса $\Rightarrow \angle CAL = \frac{1}{2}\angle CAB = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ - \angle CAB = 30^\circ$

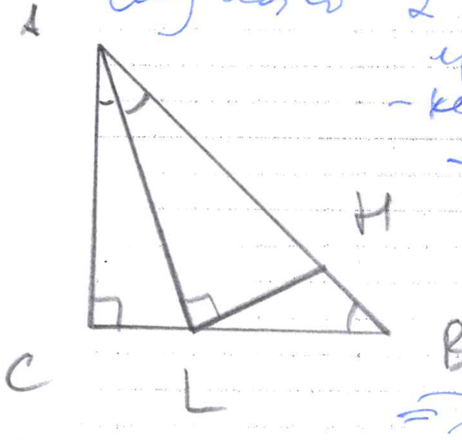


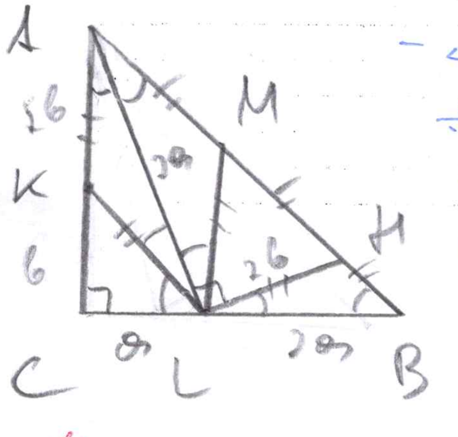
Из условия следует лишь что $\triangle AHL$ – прямоугольный $\Rightarrow$ либо $\angle AHL = 90^\circ$, либо $\angle ALH = 90^\circ$; в первом случае на рисунке $\angle CAL = \angle LAH = \angle HBL \Rightarrow \triangle ACL = \triangle ALH$, как равные по гипотенузе и углу прямоугольные треугольники, и $\triangle LBH = \triangle ALH$ как равные по катету и углу прямоугольные треугольники $\Rightarrow$

$S_{\triangle ACL} = S_{\triangle ALH} = S_{\triangle LBH}$; $S_{\triangle ACL} + S_{\triangle ALH} + S_{\triangle LHB} = S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle LBH} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3} = \frac{1}{3}$ (+)

случай 2: В этом случае теперь уже $\angle ALH = 90^\circ$, а $\angle B$ по-прежнему равен 30°. Проведём медиану LM треуг. ALH. Так как это медиана прямоугольного треугольника проведённая к гипотенузе, то $CM = MH = ML \Rightarrow \angle MCL = \angle MLC$; $\angle LAB = 30^\circ \Rightarrow LH = \frac{1}{2}AH \Rightarrow LH = ML$; $\angle ALC = 90^\circ - \angle CAL = 60^\circ$; $\angle HLB + \angle ALH + \angle ALC = 180^\circ \Rightarrow \angle HLB = 30^\circ \Rightarrow \angle HLB = \angle HBL \Rightarrow HB = LH = ML = AM$, $\angle LHB = \angle AML$ (потому что $\angle LHB = 180^\circ - 2\angle B = 120^\circ$, $\angle AML = 180^\circ - 2\angle LAM = 120^\circ$) $\Rightarrow \triangle AML = \triangle LHB$.

Т.к. LM – медиана, то $S_{\triangle AML} = S_{\triangle MLH} \Rightarrow S_{\triangle LHB} = S_{\triangle AML} = S_{\triangle MLH}$





Не указано, как выбрана точка K

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 3	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-8-16 ШИФР УЧАСТНИКА

Задача 3 Продолжение

Случай 2: Отложим $AK = AM$ на стороне AC, тогда $\triangle AKL = \triangle ALM$ по 1-му приз. равн. треуг. $\Rightarrow KL = LM = AM = AK$ и $\angle KLA = \angle KAL \Rightarrow \angle CKL = 2\angle KAL = 60° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle KLC = 30° \Rightarrow KC = \frac{1}{2}KL$, пусть $KC = b$, $CL = a$ тогда т.к. $\angle CAL = 30°$, то $AL = 2a$ и так как по ранее доказанному $\triangle ALM = \triangle LKB$, то $LB = AL = 2a$, также так как $AK = KL = 2b$, то $S_{\triangle ABC} = \frac{3a \cdot 3b}{2} =$ $= 4{,}5ab$, а $S_{\triangle LBK} = \frac{1}{2} S_{\triangle ALK}$, $S_{\triangle ALK} =$ $= \frac{2a \cdot 2b}{2} = 2ab \Rightarrow S_{\triangle LBK} = ab = \frac{S_{\triangle ABC}}{4{,}5} =$ $= \frac{1}{4{,}5} = \frac{2}{9}$

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{2}{9}$

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 4	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-8-16 ШИФР УЧАСТНИКА

Если для плоскости и точек то треугольник можно выбрать $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ способами, при этом это кол-во по условию не меньше 12

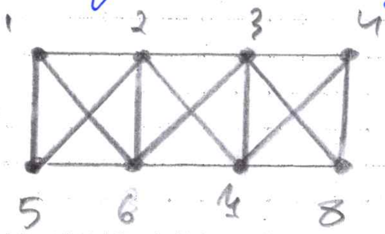
$\Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} \geq 12 \Rightarrow n(n-1)(n-2) \geq 72 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \geq 6$, так как при $n < 6$:

$n(n-1)(n-2) \leq 5 \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow n(n-1)(n-2) \leq 60 < 72$

$\Rightarrow$ это невозможно

Пример для $n = 8$:



На рисунке треугольники с вершинами в точках 125, 126, 156, 256, 263, 237, 267, 367, 378, 384, 374, 478 равны, всего 12 треуг.

доказана оценка ≥ 6

3б

Председатель жюри [подпись] Мензев В. В.

Члены жюри [подпись] Песцова Т. В.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 5	ЛИСТ 1 ИЗ 2	М-8-16 ШИФР УЧАСТНИКА

Заметим, что после обхода всех стражников если состояние двери изменили чётное кол-во стражников, то она останется закрытой, а если нечётное, то открытой. Также заметим, что первый стражник изменяет состояние всех дверей чей номер кратен 1, второй стражник — всех дверей чей номер кратен 2, третий — все :3 и так далее. Итак, так как всего 1000 стражников и 1000 дверей, то каждую дверь трогали столько раз, сколько у её номера натуральных делителей. Как известно, если $n = p^k \cdot q^m \ldots$, где n — натуральное число, p и q — простые делители n, k и m — их степени вхождения в разложение n на прост. делители, то кол-во всех натуральных делителей n равно $(k+1)(m+1)\ldots$, то есть произведению всех увеличенных на единицу степеней простых делителей. Поэтому если удалить стражника, открывающего каждую n-ую дверь, то теперь каждую дверь будут открывать столько раз, сколько было бы у неё натуральных делителей без n. Тогда давайте разложим 119, 363 и 441 на простые делители: $119 = 7 \cdot 17$, $363 = 3 \cdot 11^2$, $441 = 7^2 \cdot 3^2 \Rightarrow$ у 119 — $2 \cdot 2 = 4$ натуральных делителя, у 336 — $2 \cdot 3 = 6$ натуральных делителя, а у 441 — $3 \cdot 3 = 9$ натуральных делителя

1	2	3	4	5	Σ

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 5	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-8-16 ШИФР УЧАСТНИКА

Задача 5 Продолжение

Заметим что 4 : 2 и 6 : 2, но нам нужно чтобы у всех дверей из списка кол-во посещений странниками было нечётным, при этом 119 и 363 взаимно просты, значит что мы не можем убрать
\+ одного странника так чтобы у обеих дверей 119 и 336 было бы нечетное кол-во посещений => нам понадобится хотя бы 2 странника, например странников которые открывают каждую 7-ю и 3-ю дверь, тогда 119-ю дверь открывают только странники которые открывают каждую 119-ю, 1-ю и 17-ю дверь, 363-ю только те которые открывают каждую 11-ю, 33-ю 121-ю, 1-ю и 363-ю дверь, а 441-ю только те которые открывают каждую 49-ю, 9-ю, 147-ю, 63-ю, 441-ю, 1-ю и 21-ю дверь => всего 119-ю открывают 3 раза, 363 5 раз и 441 7 раз => условие задачи выполнено

Ответ: 2, те которые открывают каждую 7-ю и 3-ю дверь