ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-10-10 ШИФР УЧАСТНИКА

Да, существуют. Пример: натуральные числа 1959, 1960, 1961, ..., 2084, 2085. Их 127 (1959 – первый член арифметической прогрессии с разностью между последующими членами в 1, значит 127-ой член данной прогрессии равен $a_{127} = a_1 + (127-1) = 1959 + 126 = 2085$).
Их сумма $S_{127} = \frac{(a_1 + a_{127}) \cdot 127}{2} = \frac{(1959 + 2085) \cdot 127}{2} = \frac{4044 \cdot 127}{2} = 2022 \cdot 127 \Rightarrow$ сумма $\vdots$ ~~127~~ 2022.

7б

1	2	3	4	5	Σ	
7	7	7	0	3	24	
7	7	7	0	3	24	

Председатель: Мендель В.В.
Члены жюри: Илларионов А.
Тынянкая Н.А.
Лабузная И.С.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-10-10 ШИФР УЧАСТНИКА

Выиграет Боря. Его тактика — дополнять ходы Аси до 100, то есть ~~какими бы номерами~~ когда Ася нумерует Енота числом a, то Вася нумерует енота числом $100-a$, при этом 50 соответствует число 100 (если Ася пронумеровала Енота числом 100 или 50, то Боря нумерует своего 50 или 100 соответственно). $100 \not\vdots 7$, $150 \not\vdots 7$ $\Rightarrow$ последние 2 енота (их номера) в сумме не будут давать число $\vdots 7$. Боря всегда может сходить, так как каждому числу от 1 до 100 соответствует число, отличное от него самого и Боря ходит вторым — ему всегда есть, что дополнять. Число не может не иметь соответствующего ему числа, т.к. тогда оно уже было использовано, однако если оно использовано, то использовано и соотв. ему число. Соответствовать — давать в сумме 100 (для чисел 50 и 100 — 150), то есть если a соотв. b, то $a+b=100$. Т.к. всего чисел ~~100~~ четное кол-во, то каждое число имеет соответст. ~~Ася не~~

75

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 3	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-10-10 ШИФР УЧАСТНИКА

$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 = 2(x-1)^2(x+\frac{1}{2})$

Чтобы $p(x) = y^2$, где y — целое, либо ~~один~~ один из множителей $=0$ ($(x-1)=0$ или $(x+\frac{1}{2})=0$), либо $2(x+\frac{1}{2})$ является квадратом (в разложении квадрата целого числа на множители (простые) степени всех множителей четны; $(x-1)^2$ имеет четную степень, 2 не является квадратом целого числа, следовательно $2(x+\frac{1}{2})$ — квадрат).

1) Если один из множителей равен нулю, то $x=1$ или $x=-\frac{1}{2}$. По условию мы не рассматриваем $x=-\frac{1}{2}$, следовательно $x=1$. Тогда $p(x)=p(1)=2\cdot 0^2\cdot\frac{1}{2}=0$ — квадрат целого числа, подходит условию.

2) Если $2(x+\frac{1}{2})$ является квадратом, то $2(x+\frac{1}{2})=y^2$, где y — целое. Квадрат целого числа можно представить в виде $4k$ либо $4k+1$ ~~(y по модулю 4 может давать 4 разных остатка~~

$y \pmod 4$	$y^2 \pmod 4$
0	$0^2 \equiv 0 \pmod 4$
1	$1^2 \equiv 1 \pmod 4$
2	$2^2 \equiv 0 \pmod 4$
3	$3^2 \equiv 1 \pmod 4$

k — целое

$2x+1=y^2$, при этом т.к. $2x \vdots 2$, $1 \not\vdots 2$, то $2x+1 \not\vdots 2 \Rightarrow y^2 \not\vdots 2$

$= y^2 = 4k+1$ $\quad 2x+1=4k+1 \quad 2x=4k \quad x=2k \Rightarrow x$ — четное

$2x+1=y^2$

$2x=y^2-1$

$2x=(y-1)(y+1) \Rightarrow y$ — нечетное (чет·нечет = нечет, нечет*

* нечет = нечет $\neq 2x$ (чет))

положительн.

пусть $x \leq y$, тогда $2x \leq 2y$, $y^2-1 \leq 2y$, $y^2-2y-1 \leq 0$, $(y-1)^2-2 \leq 0$, $(y-1)^2 \leq 2$, $y-1 \leq \sqrt{2}$, $y \leq \sqrt{2}+1 < 3$. Следовательно для $y \geq 3$ верно $x \geq y$. $y \neq 2$, $y=1$ в первом пункте

~~Рассмотрим $y \geq 3$. Если $y=73$, то $2x=(73-1)(73+1)=5328$, $x=\frac{5328}{2}=2664$, что условию $1 \leq x \leq 2022$. Если $y=71$, то $2x=(71-1)(71+1)=5040$, $x=2$~~

Рассмотрим $y \geq 3$. Если $y=65$, то $x=\frac{(65-1)(65+1)}{2}=2112$, однако по условию $1 \leq x \leq 2022$. Если $y=63$, то $x=\frac{(63-1)(63+1)}{2}=1984$, подходит по условию. Так как функция $p(x)$ непрерывна, то значение будет существовать для любого $x \Rightarrow$ для любого y (для любого y существует x). Таким образом, все $3 \leq y \leq 63$ подходят по условию (y — целое нечетное). Таких y существует $31 \Rightarrow$ существует всего 31 x, что $p(x)$ является квадратом целого числа.

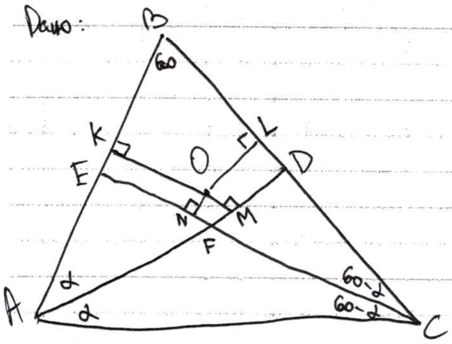
Итого у нас 1 y из первого пункта и 31 из второго, итого 32 y и 32 x таких, что $p(x)$ — квадрат целого числа.

Ответ: 32.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 4	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-10-10 ШИФР УЧАСТНИКА

Дано:



$\angle A = 2\alpha$

$\angle B = 60^\circ$

O – центр опис. окружности

CE, AD – бисс.

$ON \perp EC$, $OM \perp AD$

Док-ть:

$ON = OM$

Док-ство:

$180 - \angle A - \angle ECA = \angle AEC = 180^\circ - 2\alpha - 60 + \alpha = 120^\circ - \alpha$ +

$180 - \angle EAF - \angle AEF = \angle EFA = 180 - \alpha - 120 + \alpha = 60^\circ$ +

$180^\circ - \angle NFA = \angle NFM = 180 - 60^\circ = 120^\circ$

OKBL, ONFM – вписанные четырехугольники

0б

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 5	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-10-10 ШИФР УЧАСТНИКА

П[усть] что таких пар не больше 199. Всего в графе с 400 вершинами без удвоенных ребер и петель (двух ребер с одинаковыми вершинами на их концах, на рисунке выглядит как
петля →  удвоенное ребро) не более $\frac{400 \cdot 399}{2} = 200 \cdot 399$ ребер. Каждая пара

$\boxed{\text{вершина соответствует человеку, ребро — улыбке.}}$

добавляет одно ребро к максимальному числу ребер, т.к. на 1 пару приходится 2 улыбки ⟹ между каждой парой удвоенное ребро, при этом одно ребро из двух в удвоенном ребре уже посчитано. Следовательно, всего не более $200 \cdot 399 + 199$ ребер $= 200 \cdot 399 + 200 - 1 = 200 \cdot 400 - 1 = 400 \cdot 200 - 1$ ребер, то есть улыбок. Однако всего улыбок должно быть $400 \cdot 200$ (каждый из 400 человек улыбнулся двумстам) ⟹ противоречие. Следовательно, пар не меньше 200. Покажем, что для 200 пар это работает: в таком графе не более $200 \cdot 399 + 200$ ребер $= 200 \cdot 400$ ребер, следовательно при 200 парах каждый мог улыбнуться 200 другим людям.

(+)

Пример (−)

Оценка (+)

(3б)