ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.5	ЛИСТ 5 ИЗ 5	М-11-13 ШИФР УЧАСТНИКА

Суммарно люди в зале выдавили из себя $400 \cdot 200$ улыбок (каждый по 200)
Кол-во различных пар людей в зале $\frac{400 \cdot (400-1)}{2}$

По принципу Дирихле найдётся хотя бы 200 пар $\left(400 \cdot 200 - \frac{400 \cdot (400-1)}{2}\right)$, где улыбнулись ~~друг~~ оба человека, при условии, что больше 2 улыбнуться не может. (В противном случае взаимных улыбок было не более $199 \cdot 2$) ~~от кроме~~

Пример: Расставим людей по кругу. Рассмотрим человека, которому присвоим номер 0, пронумеровав их по часовой стрелке.] 0-вой улыбнется 1-му, 2-му ... 199-му и 200-му человеку. Каждый i-й будет улыбаться от $i+1$ до $i+200$ человеку. Будем считать, что $i \equiv i+400$, $i+1 \equiv i+401$ и т. д. Тогда каждый i улыбнется $i+200$ и каждый $i+200$ улыбнется $i+400 \equiv i$. Больше у i и $i+200$ взаимных улыбок не будет. Таких пар ровно 200

Председатель жюри Мещель К.В.

Члены жюри: Ким М.Г.

Дубинская И.А.

Богоутдинова Ю.Г.

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	7	35

№	1	2	3	4	5
Б					

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.1	ЛИСТ 1 ИЗ 5	М-11-13 ШИФР УЧАСТНИКА

$2^x x + 2^y y \geq 2^y x + 2^x y$ ① $\cancel{x > y \Rightarrow 2^x \geq 2^y}$ $x - y > 0$

$\cancel{2^x(x-y) \geq 2^y(x-y)}$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

①] $x > y \Rightarrow x - y > 0$ и $2^x > 2^y \Rightarrow 2^x > 2^y \,|\cdot (x-y) \to 2^x(x-y) > 2^y(x-y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x x - 2^x y > 2^y x - 2^y y \Leftrightarrow 2^x x + 2^y y \geq 2^y x + 2^x y$ ЧТД для $x > y$

②] $x < y \Rightarrow x - y < 0$ и $2^x < 2^y \Rightarrow 2^x < 2^y \,|\cdot (x-y) \to 2^x(x-y) > 2^y(x-y)$

$\Leftrightarrow 2^x x + 2^y y \geq 2^y x + 2^x y$ ЧТД для $x < y$

③ $x = y \Rightarrow 2^x = 2^y \Rightarrow 2^x x = 2^x y = 2^y x = 2^y y \Rightarrow 2^x x + 2^y y \geq 2^y x + 2^x y$. ЧТД для $x = y$

Рассмотрены все возможные случаи

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.2	ЛИСТ 2 ИЗ 5	М-11-13 ШИФР УЧАСТНИКА

Сумма чисел от 1 до n: $\frac{(1+n)n}{2}$ $n, k \in N$ $n=50k$

Сумма чисел $\vdots 50$ от 1 до n: $\frac{(1+\frac{n}{50})\cdot\frac{n}{50}\cdot 50}{2}$

Т.к. чисел $\vdots 50$ от 1 до $k\cdot 50$ в точности k $\frac{(1+\frac{n}{50})\cdot\frac{n}{50}}{2}$ сумма чисел от 1 до k ($k=\frac{n}{50}$), числа кратные 50 это числа этого ряда домноженные на 50. Отсюда формула

Итак, сумма оставшихся чисел: $\frac{(1+n)n}{2}-\frac{(1+\frac{n}{50})\cdot\frac{n}{50}\cdot 50}{2}=$

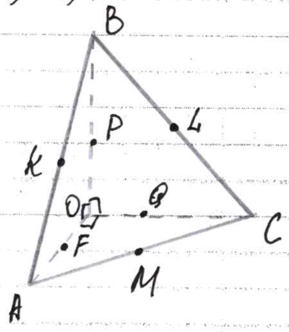
$$=\frac{n^2+n-\cancel{n}-\frac{n^2}{50}}{2}=\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{50}\right)=\frac{n^2}{2}\cdot\frac{49}{50}=\frac{49}{100}n^2=\left(\frac{7}{10}n\right)^2=\left(\frac{7}{10}\cdot 50k\right)^2=(35k)^2$$

~~Т.к. n=50k~~ $35k \in N$ $(35k)^2$ – квадрат натурального числа. Незнайка прав.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.3	ЛИСТ 3 ИЗ 5	М-11-13 ШИФР УЧАСТНИКА

О – вершина тетраэдра OABC. Из условия
$\angle AOB = \angle AOC = \angle COB = 90°$ K, L, M, P, Q, F – середины AB, BC, AC, BO, CO, AO



$\left.\begin{matrix} CO \perp OB \\ CO \perp OA \end{matrix}\right| \Rightarrow CO \perp AOB$ по призн. $\perp$ $\Big| \Rightarrow \cancel{OK} \perp CO$, $\triangle OKQ$ – п/у. Аналогично: $\triangle POM$ – п/у, $\triangle FOL$ – п/у.

$\triangle AOB$ – п/у ~~AO⊥OB~~ $\Rightarrow OK = \frac{1}{2}AB$ (медиана в п/у $\triangle$ = половине гипотенузы)

Аналогично: $OM = \frac{1}{2}AC$ и $OL = \frac{1}{2}BC$

$\triangle OKQ$ – п/у и по т. Пифагора: $KQ^2 = KO^2 + OQ^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{OC}{2}\right)^2$

$KQ = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + OC^2}$ Аналогично: $PM = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BO^2}$ $LF = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + AO^2}$

По т. Пифагора $\triangle AOB$: $AB^2 = BO^2 + AO^2 \Rightarrow AB^2 + OC^2 = AO^2 + BO^2 + OC^2$
~~Пом~~ $\triangle BOC$: $BC^2 = BO^2 + OC^2 \Rightarrow BC^2 + AO^2 = AO^2 + BO^2 + OC^2$
$\triangle AOC$: $AC^2 = AO^2 + OC^2 \Rightarrow AC^2 + BO^2 = AO^2 + BO^2 + OC^2$
$\Rightarrow AB^2 + OC^2 = BC^2 + AO^2 = AC^2 + BO^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + OC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + AO^2} \Rightarrow KQ = PM = LF$ ЧТД

(KQ, PM, LF – отрезки, соединяющие середины противоположных сторон)

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 114	ЛИСТ 4 ИЗ 5	М-11-13 ШИФР УЧАСТНИКА

$2000 < 2023 \Rightarrow 2000^6 < 2023^6$ $\quad 2000^6 = 64 \cdot 10^{18}$ — это 20 цифр.
$(2 \cdot 100)^6 = 2^6 \cdot 10^{3 \cdot 6}$

В числе 2000^6 20 цифр $\Rightarrow$ в числе 2023 их не меньше.
① Если их в нём больше, то по принципу Дирихле на 21 и больше позиций расставить 10 чисел так, чтобы они повторялись не более 2-х раз невозможно $\Rightarrow$ хотя бы одна цифра встретится хотя бы 3 раза.
②. Если же их ровно 20 предположим, что каждая встретилась ровно 2 раза. ЧТД

$(1+2+3+4+5+9+7+8+6+0)2 = 90$ — сумма цифр этого числа.
$\Rightarrow$ $2023^6 \vdots 3$ по признаку делимости. Но $2023 \not\vdots\, 3 \Rightarrow 2023^6 \not\vdots$ и такого быть не может.

Следовательно, все цифры дважды повториться не могли и найдётся цифра появившаяся не более одного раза, а значит и та, что повторится хотя бы трижды. ЧТД.