1006 13стр.

1	2	3	4	5	Σ	
7	X	7	7	0	21	

10.3.

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2023}$

x_1, x_2 - корни $x^2 + x + b = 0$

По теореме Виета

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 & (1) \\ x_1 x_2 = b & (2) \end{cases}$

Преобразуем исходное выражение:

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2023}$

$\frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{1}{2023}$

Используя (1) и (2):

$\frac{-1}{b} = \frac{1}{2023}$

$b = -2023$

Ответ: $b = -2023$ 7б

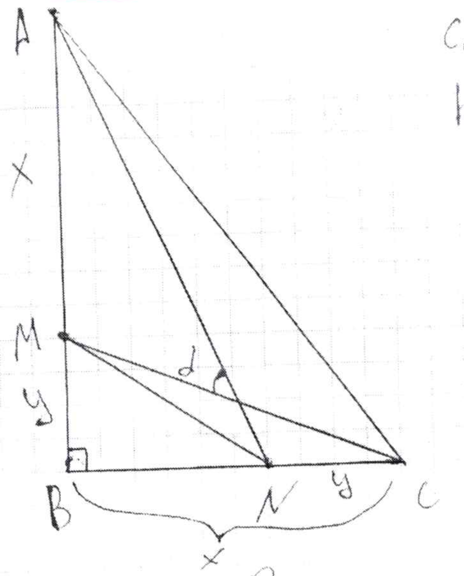
10-ое

10.4

Дано: $AM = CB$

$CN = MB$

Найти α



Решение:

Соединим точки M и N и обозначим $AM = CB = x$ и $CN = MB = y$

По св-вам площади

$$S_{ABC} = S_{MBN} + S_{AMNC}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot (x+y) x$$

2.

$S_{MBN} = \frac{1}{2} MB \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot y \cdot (x-y)$,

тогда $S_{AMNC} = S_{ABC} - S_{MBN}$

$= \frac{x(x+y)}{2} - \frac{(x-y)y}{2} =$

$= \frac{x(x+y) - y(x-y)}{2} = \frac{x^2 \cancel{+xy} \cancel{-xy} + y^2}{2}$

$= \frac{x^2+y^2}{2}$

Из известной формулы

$S_{AMNC} = \frac{1}{2} AN \cdot CM \cdot \sin\alpha$

$AN = \sqrt{(x+y)^2+(x-y)^2}$ (по т. Пифагора из $\triangle ABN$)

$MC = \cancel{\sqrt{y^2+(x+y)^2}} = \sqrt{y^2+x^2}$

(по т. Пифагора из $\triangle MBC$) $\Rightarrow$

$\frac{x^2+y^2}{2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{(x+y)^2+(x-y)^2} \sin\alpha}{2} \Rightarrow$

$\sin\alpha = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2 \cancel{+2xy} + y^2 + x^2 \cancel{-2xy} + y^2)}}$ 3

10-05

$$= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(2x^2+2y^2)}} =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)^2}} =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}\cdot|x^2+y^2|} \underline{\underline{\quad}}$$ (с учетом $x^2+y^2>0$)

$$= \frac{\cancel{x^2+y^2}}{\sqrt{2}\cdot\cancel{(x^2+y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Учитывая $\alpha < \frac{\pi}{2}$, получаем

$\alpha = 45^\circ$

Ответ: $\alpha = 45^\circ$

10. 1.

Пусть n – кол-во восьми-головых драконов, k – кол-во девятиголовых, m – кол-во

4.

десятиполовых. Тогда справедливо:

$$\begin{cases} 8n + 9k + 10m = 100 \\ n + k + m > 11 \end{cases}$$

Оценим n, постепенно спуская верхнее максимальное значение:

$n < 13$, т.к. $8 \cdot 13 = 104 > 100$ – больше кол-ва всех голов.

$n < 12$, т.к. $8 \cdot 12 = 96$, тогда оставшихся голов $100 - 96 = 4$ – противоречит условию о том, что драконов каждого типа хотя бы по одному (нет „места" для 9-ти- и 10-тиголовых)

$n < 11$, т.к. $8 \cdot 11 = 88$, тогда 12 голов в остатке и отсутствие одного из типов

10-00

5

драконов.
$n = 10$ не подходит, т.к. остается 10 голов, для которых есть несколько случаев заполнения:
2 десятиголовых дракона – противоречие, т.к. нет девятиголовых;
2 девятиголовых дракона – противоречие, остается $10 - 2 \cdot 9 = 2$ головы;
десятиголовый и девятиголовый драконы – остается $20 - 10 - 9 = 1$ голова.

Рассмотрим случай, когда $n = 9$, тогда остается $100 - 9 \cdot 8 = 28$ головы. Этот случай подходит под все

6. условия задачи и явля-

с тремя решениями! 2.8. головы распределены между одним десятиголовым драконом и двумя девятиголовыми, тогда $n = 9$; $k = 2$; $m = 1$:

$8 \cdot 9 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 72 + 18 + 10 = 100$

$9 + 2 + 1 = 12 > 11$

Дальнейшее уменьшение n с учетом $k \vdots 2$ (из равенства $8n + 9k + 10m = 100$:

$\underbrace{9k}_{\vdots 2} = \underbrace{100 - 8n - 10m}_{\vdots 2} \Rightarrow k \vdots 2$, т.к. $9 \not\vdots 2$) и оценке k аналогично n приводит к нескольким случаям выполнения равенства и невыполнения неравенства вплоть

10-06

до максимального уменьшения n, поэтому решение n = 9; k = 2; m = 1 единственно

Ответ: 9 восьмиголовых, 2 девятиголовых, 1 десятиголовый. 7б

10. 5.

Посчитаем площадь фигуры, состоящую из 8-ми столбцов от 1 до 8 квадратиков, тогда:

$$S = \frac{1+8}{2} \cdot 8 = 9 \cdot 4 = 36.$$

Предположим, что запрашиваемое замощение возможно, тогда обозначим количество прямоугольников 1×2 как n,

а прямоугольников 1×3 — ш-т
k. Справедливо

$2n + 3k = 36$

Заметим, что т.к. $36 \vdots 6$, то и $2n + 3k \vdots 6$, тогда

$\frac{2n+3k}{6} = \frac{2}{6}n + \frac{3}{6}k = \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}k$ —

целое число, а с учетом
$n \in N$ и $k \in N$ $\underline{\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}k \in N}$ не доказано!
тогда $\underline{n \vdots 3 \text{ и } k \vdots 2}$ (1)

~~Рассмотрим 3 возможных случая: $n = k$, $n > k$, $n < k$;~~
~~$n = k$:~~
~~$2n + 3k = 36$~~
~~$2n + 3n = 36$~~
~~$5n = 36 \Rightarrow n \notin N$ - противоречие~~
~~$n > k$, тогда n представимо в виде $k + r$, где $r \in N$.~~ 9.

10-ес ~~Т.к. n⋮2, а k⋮3, то r может быть только нечетным (в итоговом между числа, кратные двум и кратные трем отличны на нечетное кол-во чисел).~~

Проведем оценку для n и k на основе $2n \leq 36$ и $3k < 36$ (строгий знак взят из-за необходимости иметь в замощении хотя бы один вид прямоугольника отличного от тех, для которых проводится оценка):

$2n < 36 \quad n < 18$

10 Учитывая n⋮3 получаем

$n \in \{3; 6; 9; 12; 15\}$ | н-се

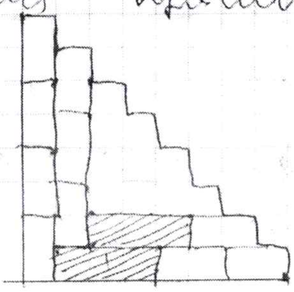
$3k < 36 \quad k < 12$

Учитывая $k \vdots 2$, получаем

$k \in \{2; 4; 6; 8; 10\}$

Полученные значения n и k соответствуют друг другу попарно пятью вариантами: $(3; 10)$; $(6; 8)$; $(9; 6)$; $(12; 4)$ и $(15; 2)$

Заметим, что для наиболее оптимального заполнения внешних слоев всегда требуется прямоугольник 1×3:



4 случая

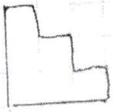
11.

10-66

Из-за этого вариант (15; 2) не подходит по нехватке прямоугольник 1×3.

По противоположной причине (нехватка 1×4) не подойдет вариант (3; 10)

Путём попыток замощения фигуры иными способами остальных трёх вариантов, приведя к выводу, что при лучшем замощении от большого прямого угла к ребристому краю приходим к конфигурации

12. типа , которую

нельзя замостить прямоугольниками 1×2 и 1×3 таким способом — ни один из вероятных вариантов не может быть использован. 10.16

Ответ: нет, нельзя. 0б

13.