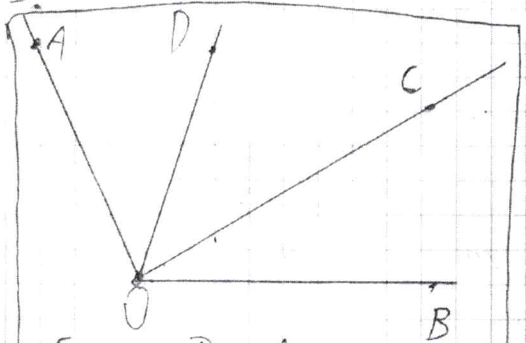
Задание № 8.7

I: ~~Д~~ Рассмотрим несколько случаев: I: Всего на чертеже



Случай I: $\angle AOC > \angle AOD$

есть углы $\angle DOB$, $\angle AOB$, биссектрисами которых может являться луч OC (т.е. $\angle DOB$ и AOB – единственные в случае I (когда угол $\angle AOC > \angle AOD$), у которых луч OC не является стороной и лежит внутри.

I.1) OC – бисс. $\angle AOB$; $\angle AOB = 120^\circ \Rightarrow \angle AOC = \angle COB = \frac{1}{2}\angle AOB$ (по определению биссектрисы) $\Rightarrow$ $\angle AOC = 60^\circ$

I.2) OC – биссектриса $\angle DOB$. Тогда рассмотрим ещё два случая, биссектрисами каких углов может являться луч OD: их всего два: $\angle AOC$ и $\angle AOB$.

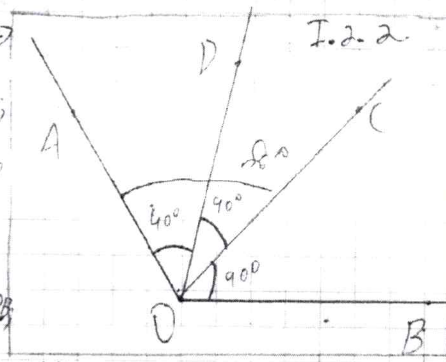
I.2.1: OD – бисс. $\angle AOB \Rightarrow \angle AOD = \angle DOB = \frac{1}{2}\angle AOB =$ (по условию случая) $= \frac{1}{2}\cdot 120^\circ = 60^\circ$; OC – бисс. $\angle DOB \Rightarrow \angle DOC = \angle COB = \frac{1}{2}\angle DOB \Rightarrow \angle DOC = \frac{1}{2}\, 60^\circ = 30^\circ$. (по опр. бисс.)

$\angle AOC = \angle AOD + \angle DOC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

8-04

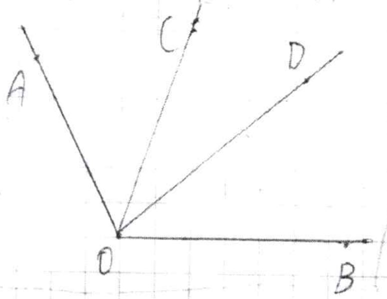
№1. Задание 8.7

I.2.2: OD - бисс. $\angle AOC \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AOD = \angle DOC$ (по опр. бисс.); OC - бисс. $\angle DOB$ (по условию случая) $\Rightarrow \angle DOC = \angle COB$ (по опр. бисс.) $\Rightarrow \angle DOC = \angle AOD = \angle COB$



$\angle AOC = 120°$ (по условию) $= \angle AOD + \angle DOC + \angle COB = 3\angle AOD \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOD = \frac{120°}{3} = 40° = \angle DOC$; $\angle AOC = \angle DOC + \angle AOD = 40° + 40° = 80°$

II случай: $\angle AOD > \angle AOC$



Во II случае OC может быть только биссектрисой углов $\angle AOD$ и $\angle AOB$.

Случай, где OC - биссектриса $\angle AOB$ так и в случае I не зависит от положения луча OD; т.к. величина $\angle AOC$ так и будет $\frac{1}{2}\angle AOB$ (по опр. бисс.) $= 60°$

Рассмотрим OC - бисс. $\angle AOD$; OD может быть биссектрисой только углов $\angle AOB$ и $\angle COB$

(случай II.1) OD - бисс. $\angle AOB \Rightarrow \angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOB = 60°$ (по определению биссектрисы). OC - бисс. $\angle AOD \Rightarrow$

Задание 8.1

=> $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2} 60° = 30°$ (по опр. бисс.)   1 -04

Случай №2

III) OD - бисс. $\angle COB \Rightarrow \angle COD = \angle DOB$ (по опр бисс.),

OC - бисс. $\angle AOD$ (по условию случая) $\Rightarrow \angle AOC = \angle COD \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle COD = \angle DOB = \angle AOC$ (из двух равенств выше);

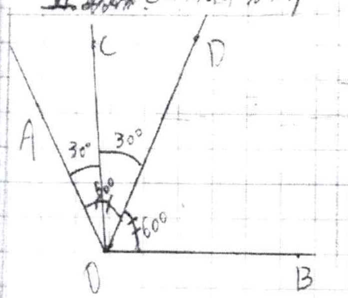
$\angle AOB = \angle AOC + \angle COD + \angle DOB = 3\angle AOC$ (из $\angle COD = \angle DOB = \angle AOC$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOC = \frac{1}{3}\angle AOB = \frac{1}{3} \cdot 120° = 40°$

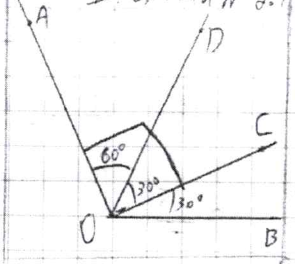
Ответ: $\angle AOC$ может быть равен 40°, 30°, 80°, 90°, 60°

Чертежи к случаям:

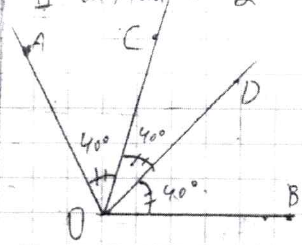
II. Случай №1



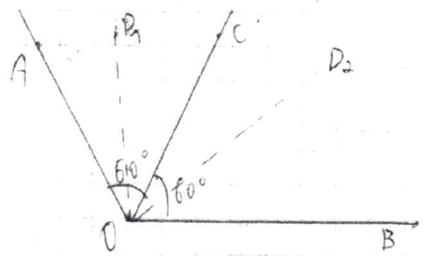
I. случай №2.1



II. случай №2



OC - бисс. $\angle AOB$ (не зависит от положения луча OD (см. п. II)



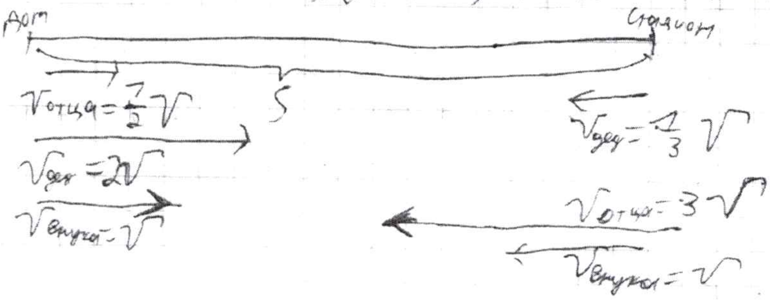
3-04

Задание 8.2.

$S = t\cdot V$; $t = \frac{S}{V}$

Пусть V – скорость внука, рассмотрим бег до стадиона и обратно

а точнее – время. Пусть S – расстояние от дома до стадиона



Расстояние и скорость известны $\Rightarrow$ можно найти время каждого.

$$t_{отца} = \frac{{}^{\cdot 3/}S}{\frac{1}{2}V} + \frac{S}{3V} = \frac{6S}{3V} + \frac{S}{3V} = \frac{7S}{3V} = 2\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{V}$$

$$t_{дед} = \frac{S}{2V} + \frac{S}{\frac{1}{3}V} = \frac{S}{2V} + \frac{3S}{V} = \frac{7S}{2V} = 3\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{V}$$

$$t_{внука} = \frac{S}{V} + \frac{S}{V} = 2\frac{S}{V}$$

$$2\cdot\frac{S}{\underline{\underline{V}}} < 2\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{\underline{\underline{V}}} < 3\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{\underline{\underline{V}}} \Rightarrow t_{внука} < t_{отца} < t_{дед}$$

(мы можем сравнить коэффициенты, т.к. переменные одинаковые).

Т.к. выбежали одновременно; и время, которое затратил внук на преодоление ~~[illegible]~~ дистанции, наименьшее то внук прибежал первым, за ним отец (т.к. $t_{отца} < t_{дед}$)

Ответ: первый – внук, второй – отец, третий – дедушка

4

Задание 8.4.

Заметим, что Карлсон может брать только нечётное количество плюшек (1 или 3), а это значит, что чётность количества пирожков после хода Карлсона всегда будет изменяться (док-во: если плюшек было $2n+1$, а Карлсон берёт $2a+1$, то $2n+1-(2a+1)=2\cdot(n-a)+0$ = четное число по опр.; если было $2n$ плюшек, то $2n-2a-1=2\cdot(n-a-1)+1$; остаток от деления на $2=1$ => число нечётное).

Малыш ходит первым; он может сделать так, чтобы после его хода было всегда нечётное число: изначальное кол-во $2024=2n$, ~~всегда~~ когда Малыш берёт нечётное кол-во плюшек - четность меняется на нечетное кол-во плюшек на тарелке - карлсон берёт же нечётное кол-во => на тарелке снова чётное кол-во.

Таким образом, стратегия Малыша на первом этапе: брать по одной плюшке, карлсону же остаётся брать либо 3, либо 1; общее колво взятых плюшек после двух ходов - Малыша и Карлсона - будет $1+3=4$ плюшки, или же $1+1=2$ плюшки.

5

2 - 04

Задание 8. а)

четверки

Рассмотрим то где ~~[illegible]~~ последние ходы. Раз

(в конце плашек)

максимальный шаг равен 4-м, то тогда кол-во

плашек в конце может быть либо 4n+ :

Задание 8.и

8 · 64

Рассмотрим остаток от деления получившегося количества на 4: он может быть либо 0, либо 2 (после ходов Карлсона и Малыша всегда), т.к., как уже было доказано, кол-во плюшек после хода Карлсона по нашей стратегии всегда чётное, а остатки 3 и 1 при делении на 4 имеют только нечетные числа ($4n+1 = 2\cdot(2n)+1$; $4n+3 = 2\cdot(2n+1)+1$). Таким образом кол-во плюшек на тарелке можно записать как $4n+2$ или $4n$ (после хода Карлсона).

Максимальный шаг в количестве плюшек на тарелке равен 4-м (после ходов Малыша и Карлсона), в связи с этим можно доказать, что в какой-то момент количество плюшек на тарелке станет равно либо 6, либо 4, ~~[illegible]~~ при этом количество станет таким именно после хода Карлсона

1) Количество плюшек постоянно уменьшается $\Rightarrow$ рано или поздно на тарелке будет <10 плюшек ~~количество~~

~~[illegible]~~ 2) Разделим числа на пары (числа - кол-ва плюшек)

6

8 - 04 Задание 8. И.

пары будут состоять из чисел $4n$ и $4\cdot n+2$. (Рассматриваем кол-ва только после ходов Карлсона — они будут, как доказано выше $4n$ и $4\cdot n+2$). Таким образом получится цепь из значений:

$$\dots \leftarrow 4\cdot(n-3) \leftarrow \underbrace{(4\cdot(n-2))+2 \leftarrow 4\cdot(n-1)}_{2\text{-я пара}} \leftarrow \underbrace{4(n-1)+2 \leftarrow 4n}_{1\text{ пара}}$$

Тезис: количество плюшек на тарелке примет хотя бы одно из значений из одной пары чисел.

Док-во:

Рассмотрим два случая: начальное кол-во $=4n$ и начальное кол-во $=4\cdot(n-1)+2$ (оба числа из одной па

1) Пусть кол-во $=4\cdot n$, то тогда после ходов Малыша и Карлсона из этого количества отнимется либо 2, либо 4 (по стратегии Малыша).

1.1: $4n-4=4\cdot(n-1)=$ число из следующей пары

1.2: $4n-2=4\cdot(n-1)+2=$ число из этой же пары; но ссылаемся на второй случай $\longrightarrow$

$\rightarrow$ 2) Пусть кол-во $=4\cdot(n-1)+2$, то тогда от

~~[illegible]~~ Задание 8.4.

$x - 0.4$

от $4(n-1)+2$ можно отнять либо 4, либо 2

(2.1) $4(n-1)+2-2 = 4(n-1) = 4$ исло из следующей пары

(2.2) $4(n-1)+2-4 = 4\cdot(n-2)+2$ = число из следующей пары

Все случаи рассмотрены. И какое бы число ~~[illegible]~~ плюшек из двух возможных (2 или 4) ни взяли бы вместе Малыш и Карлсон, кол-во плюшек на тарелке всегда примет ~~[illegible]~~ значение из следующей пары чисел, а из этого можно сделать вывод, что в каждой паре хотя бы одно из чисел станет значением количества ~~[illegible]~~ плюшек на тарелке (после хода Карлсона).

По построению конструктива в паре стоят два числа - первое делится на 4 $(=4\cdot n)$, второе же на 2 меньше, чем первое $(4\cdot n-2 = 4\cdot(n-1)+2)$. Тогда в одной паре чисел будут числа 2024 и 2022, 2020 и 2018, и т.д. до пары: 8 и 6 ~~[illegible]~~ - ее мы и рассмотрим

8

8 - ж

Задание 8.4.

Как было доказано, после хода Карлсона на тарелке будет кол-во ~~[illegible]~~ плюшек, значение которого будет одним из чисел в паре.

I случай → Пусть на тарелке будет 8 ~~[illegible]~~ плюшек (конечно после хода Карлсона), тогда Малыш снова берёт одну ~~[illegible]~~ плюшку ⟹ кол-во плюшек становится равным 7. ~~[illegible]~~ Если Карлсон возьмёт 3 плюшки, то на тарелке станет 4 плюшки. Малыш по условию задачи может сделать ход (взять 4 плюшки), тогда на тарелке останется 0 плюшек ⟹ Карлсон не может сделать ход ⟹ Малыш победил.

Вернёмся к моменту, когда на тарелке 7 плюшек. Карлсон вместо трёх может взять одну, тогда на тарелке будет 6 плюшек → II случай

II случай: Пусть на тарелке после хода Карлсона оказалось 6 плюшек. Тогда Малыш может взять 4 → останется две. Карлсон не может взять три плюшки (т.к. на тарелке их всего две) ⟹ ~~[illegible]~~ единственный возможный ход Карлсона —

9

Задание 8.4.

единственный ход – взять одну плюшку, тогда на тарелке останется 1 плюшка, Малыш в свой ход её забирает → остаётся 0 плюшек → Карлсон не может сделать ход → Малыш победил.

Таким образом, Малыш побеждает при стратегии

1. До момента, когда количество плюшек на тарелке равно 8 или 6 – брать по одной плюшке

2. Когда кол-во = 6 или 8, действовать по стратегии, описанной в I и во II случаях.

8 - 4

10

8-сч

Задание 8.3.

Любое целое число можно записать в виде $2023 \cdot n + r$ $(r < 2023; n, r \in \mathbb{Z})$, тогда, чтобы получить число, делящееся на 2023, можно из $2023 \cdot n + r$ отнять r. Так как $r < 2023 \Rightarrow$ $\Rightarrow r < 10000 \Rightarrow$ при вычитании r изменятся только последние 4 разряда (но при условии, что ~~...~~ эти 4 разряда $\overline{abcd} \geq 2022$, иначе придется занимать десяток из других разрядов), а значит, что перед этими последними четырьмя разрядами могут быть любые цифры. И существует число с любым набором цифр с пятого разряда, которое делится на 2023, а чтобы найти такое число для этого набора цифр, нужно найти остаток деления от $\overline{a_1a_2a_3 \ldots a_n bcde}$ на 2023 и отнять остаток.

17

При этом $\overline{bcde}$ должно быть ≥ 2022.

Нужный нам набор $\overline{a_1a_2a_3 \ldots a_n}$ = набору всех цифр с 0 до 9-ти; пусть это будет 9876543210, тогда $\overline{bcde}$ возьмём как 2022 — этого достаточно, чтобы при вычитании остатка набор цифр 9876543210 не изменился

Задание 8.3

Найдём остаток от деления полученного числа на 2023:

```
-98765432702022 | 2023
  8092          |------------
 -17845         | 488227277429
  16784
   16614
  -16184
     -4303
      4046
      -2572
       2023
       -5497
        4046
        -14450
         14767
          -2892
           2023
           -8690
            8092
            -5982
             4046
            -19362
             18207
              1155 = остаток
```

98765432702022 − 1155 = 98765432700867

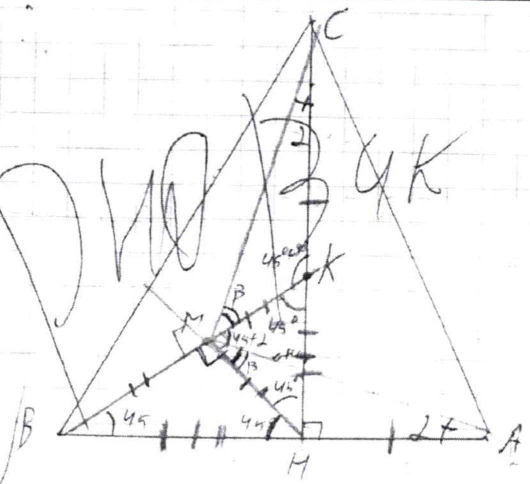
Ответ: 98765432700867

8-24

72

8. ~~4~~)

Задание 8.5



Черновик

Продолжим луч BM до прямой CH: $BM \cap CH = K$;

$\angle BHM = 45^\circ$ (р/б прямоугольный Δ) $= \angle HMB$;

$\angle KHB = 90^\circ$ (по опр. высоты) $\Rightarrow \angle BKH = 45^\circ$ по сумме $\angle$ $\Delta BHK \Rightarrow$

$\Rightarrow HK = BH$; $BM = MH$ (по условию); MH = биc. $\angle BHK$ (т.к. $\angle CHM = (\angle CHB(90^\circ) - \angle MHB(45^\circ)) = 45^\circ$);

$CH = AB$, $AB = BH + AH$; $CH = KH + CK = BH + CK \Rightarrow AH = CK$.

$\Delta AHM = \Delta CKM$ (по I призн.): $\angle MHA = \angle CKM = 135^\circ$, т.к. $\angle BKH = 45^\circ$ (ΔBKH - р/б и прямоугол.); $\angle CKB$ - внешний $= 180 - 45 = 135^\circ$; $AH = CK$; $MK = MH$ (медиана в прямоуг. Δ).

] $\angle MAH = \alpha \Rightarrow \angle MCK = \alpha$.

] $\angle CMK = \beta \Rightarrow \angle HMA = \beta$.

Задание 8.5

Дано:

△ABC, CH - высота

CH = AB.

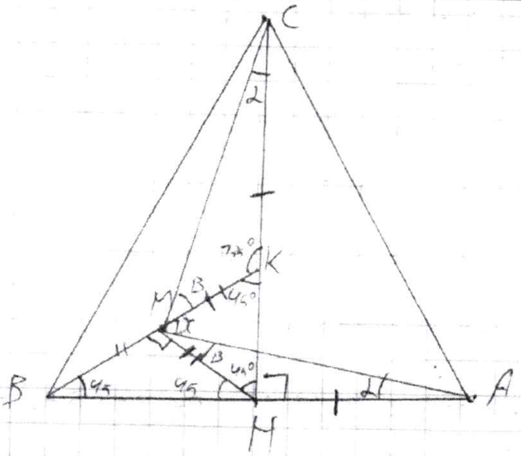
BM = MH,

M ∈ △CHB

∠AMH = 90°

Док-ть:

∠AMC = 90°



8-04

Продолжим луч BM до CH: BM ∩ CH = K;

1) $\angle MBH = \angle MHB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ (св-во р/б треугольн.);

$\angle CHB = 90^\circ = 45^\circ + \angle MHK \Rightarrow \angle MHK = 45^\circ$; HM — бис. и высота в △KHB => △KHB - р/б (признак) =>

=> $\angle KBH = \angle BKH = 45^\circ$, KH = BH (по опр. р/б)

2) CH = AB, AB = BH + AH; CH = KH + CK = BH + CK =>

=> AH = CK.

7/3

$\angle CKM$ = внешн. для $\angle BKH = 180^\circ - \angle BKH = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$;

$\angle AHM = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$; AH = CK; HM = MK (как медиана из прямого угла) => △MHA = △CKM (по I признаку) => $\angle MAH = \angle MCK = \alpha$, $\angle CMK = \angle AMH = \beta$

Можно выразить сумму углов △: $180^\circ = 135^\circ + \alpha + \beta$

∃ ∠KMA = x; тогда в △MKH $\angle MKH + \angle KHM + \angle HMK = 180^\circ$ (св-во △) => $45^\circ + 45^\circ + \beta + x = 180^\circ$

8-04

Задание 8.5

Тогда из суммы углов этого треугольника (ΔMKH) и выраженной ранее сумме углов ($180° = 135° + \alpha + \beta$) можно найти x:

$$90° + \beta + x = 135° + \alpha + \beta$$

$$x = 45° + \alpha$$

Тогда $\angle CMA = \beta + x = \beta + \alpha + 45°$

Из суммы углов $180° = 135° + \alpha + \beta$ можем найти сумму $\alpha + \beta$: $\alpha + \beta = 180° - 135° = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AMC =$ ~~[illegible]~~ $45° + \alpha + \beta = 45° + 45° = 90°$, что и требовалось доказать.

14